Université de Montpellier II

BioMath 1 (2004-2005)

Cours: Fonctions de Plusieurs Variables

Jérôme Droniou [1].

1 Définition

Jusqu'à présent, nous avons considéré des fonctions qui "prenaient" un réel x et renvoyaient un réel $f(x)$. Cependant, rien n'empêche de considérer des fonctions qui prennent *deux* (ou plus...) réels x et y et renvoient un réel $f(x,y)$. Ces fonctions sont appelées *fonctions de plusieurs variables* et c'est le propos de notre étude ici. Nous nous restreindrons aux cas des fonctions de deux variables, mais la généralisation aux cas de trois ou plus variables est immédiate.

En guise d'exemple, considérons le cas simple d'une population évoluant sous la loi de Malthus. On sait alors que la population au temps t est $N(t) = N_0 e^{kt}$ où k est le taux de croissance; quand on considère cette fonction du temps, cela signifie que l'on ne cherche à comprendre que la dépendance par rapport au temps de la population. Cependant, on voit assez rapidement que la population considérée dépend aussi du taux de croissance k: si on change celui-ci (par exemple parce qu'on regarde une autre population ayant un taux de croissance différent), même en ne regardant qu'un temps t fixé, la population va changer. On pourrait donc naturellement vouloir étudier la fonction de deux variables $f(t,k) = N_0 e^{kt}$, afin de comprendre à la fois l'effet du temps *et* du taux de croissance sur la population.

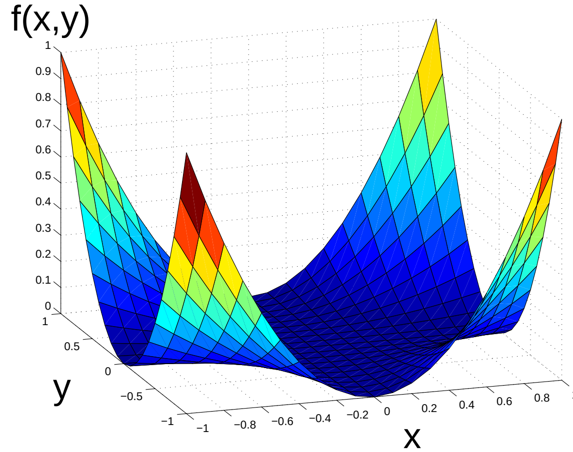
Etant donné que le cas des fonctions de plusieurs variables est a priori plus complique que celui d'une variable, un premier réflexe peut être d'essayer, quand on a une fonction de deux variables $f(x,y)$, de se ramener au cas des fonctions d'une variable.
On créé donc les *fonctions partielles* de la manière suivante: pour y fixé, on peut définir $g(x) = f(x,y)$ et, pour x fixé, on peut définir $h(y) = f(x,y)$. Bref, on "gèle" une variable et on regarde comment f dépend de l'autre.
A noter qu'il y a autant de fonctions g possibles que de y qu'on a fixé: si y_1 et y_2 sont deux réels, il n'y a pas de raison que les fonctions partielles $x \to f(x,y_1)$ et $x \to f(x,y_2)$ soient identiques. On devrait donc plutôt noter $g_y(x) = f(x,y)$, i.e. mettre un indice y à g pour se rappeler la valeur à laquelle on a fixé la seconde variable (par exemple, $g_{1.5}(x)$ représente ainsi la fonction $x \to f(x,1.5)$, lorsque y a été fixé à 1.5).

2 Représentation graphique

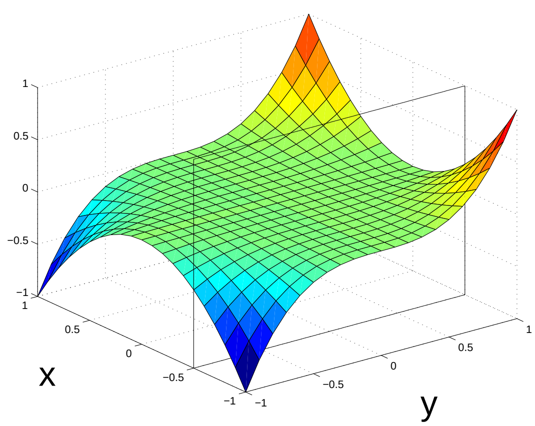
Une première difficulté notable des fonctions de plusieurs variables est leur représentation graphique. Lorsque l'on a une fonction d'une variable x, on pouvait la représenter graphiquement dans le plan en se donnant un repère et en positionnant les points d'abscisse x et d'ordonnée $f(x)$. Cependant, dans le cas d'une fonction de deux variables, ceci n'est pas possible: on devrait positionner en abscisse le couple de deux points (x,y), pour mettre en ordonnée la valeur $f(x,y)$ correspondant; or on ne peut positionner sur une droite un couple de points.
Un couple de points (x,y) se positionne dans un plan... cela suggère donc la représentation graphique suivante: on se donne un plan (disons horizontal pour fixer les idées) sur lequel on positionne le couple

[1] Département de Mathématiques, CC 051, Université Montpellier II, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5, France. email: droniou@math.univ-montp2.fr

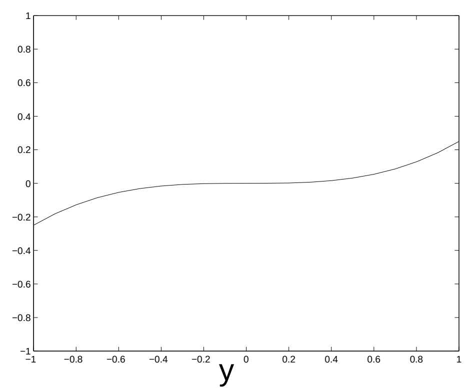
(x, y) et, sur un troisième axe vertical, au dessus du point (x, y), on positionne un point à la hauteur $f(x, y)$. Cette représentation graphique de f, que l'on appelle *surface-graphe*, sera donc tri-dimensionnelle. En projection, ce graphe pourra avoir une allure du genre

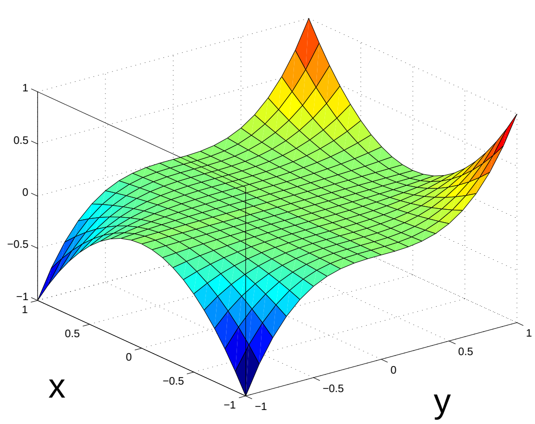


Histoire de mieux comprendre ces graphes, et surtout d'arriver à les tracer, on peut les couper avec des plans parallèles aux axes. Considérons d'abord le cas de plans verticaux et parallèles a un des axes x ou y. Lorsque l'on coupe une surface-graphe par un tel plan, on obtient un graphe usuel de fonction:

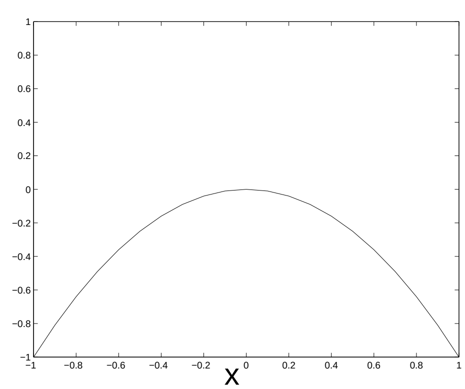


$\longrightarrow$





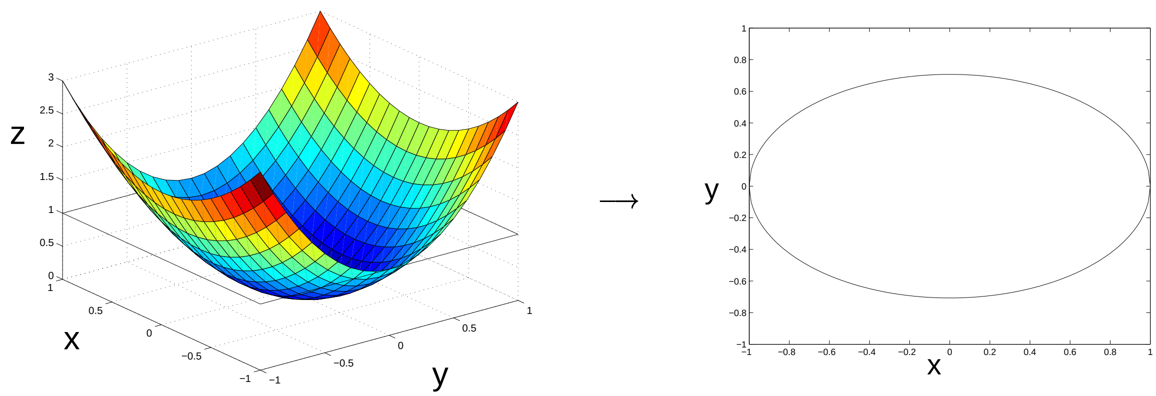
$\longrightarrow$



Ces graphes obtenus correspondent justement aux courbes des fonctions partielles g et h; dans le premier exemple, on a coupé la surface graphe par un plan le long duquel on a $x = -0.5$ constant: cela signifie

donc qu'on a regardé l'évolution de f lorsque x reste constant à -0.5, c'est à dire exactement le graphe de $h_{-0.5}(y) = f(-0.5, y)$ (y évolue librement le long de ce plan). Dans le deuxième exemple, on a tracé le graphe de $g_{-1}(x) = f(x, -1)$ (le long du plan de coupe, y reste constant à -1).
Cette idée donne un moyen pour obtenir l'allure de la surface-graphe associée à f: si, par exemple, on peut tracer les graphes de g_y pour diverses valeurs de y, il suffit de reporter ces graphes dans les plans, dans les coordonnées tri-dimensionnelles, correspondant à y =constant pour obtenir la surface-graphe de f. Notez que c'est exactement ce que signifient les quadrillages sur les figures représentées .

On peut aussi décider de couper la surface-graphe de f par des plans horizontaux, correspondant à z=constant (z est la troisième coordonnée, la verticale). Auquel cas, on obtient ce qu'on appelle les *lignes de niveau* de f; il s'agit de courbes dans le plan (x, y) qui correspondent à des zones où f est constant (égal à la valeur de z à laquelle on a coupé):



Ces courbes de niveau sont par exemple représentées sur les cartes de météorologie où l'on y indique les lignes de température constante (isothermes). On peut tracer en même temps un grand nombre de courbes de niveau en affectant une couleur à chacune, la couleur variant continuement, par exemple allant du rouge pour la courbe la plus chaude jusqu'au bleu pour la courbe la plus froide.

3 Dérivées partielles

Un outil puissant dans l'étude des fonctions d'une variable est la dérivation. Il parait délicat d'étendre la notion de dérivée brutalement au cas d'une fonction de deux variables, mais on peut cependant parler des dérivées des fonctions partielles $g_y(x)$ et $h_x(y)$, qui sont chacun des fonctions d'une variable.

Ces dérivées sont appelées *dérivées partielles* de $f(x, y)$. On les note

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (g_y)'(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (h_x)'(y).$$

Pour calculer ces dérivées partielles, il faut donc, dans la formule qui donne f, geler la variable par rapport à laquelle on ne dérive pas (par exemple geler y si on veut dériver par rapport à x) et dériver par rapport à l'autre variable. Afin de ne pas confondre les deux variables (dans un calcul un peu long, on peut oublier la variable par rapport à laquelle on veut dériver), il peut être judicieux de donner temporairement un autre nom a la variable gelée, un nom qui rappelle davantage celui d'une constante et qui ne nous incitera pas à dériver par rapport à cette variable: par exemple, si on veut dériver par rapport à x, poser en début de calcul $y = c$, calculer la dérivée, puis remettre y à la place de c à la fin du calcul.

Considérons deux fonctions d'une variable $u(t)$ et $v(t)$ et une fonction de deux variables $f(x, y)$. On peut créer la fonction d'une variable $\boxed{w(t) = f(u(t), v(t))}$. De la même manière qu'on sait dériver la composition de fonctions d'une variable, on peut calculer la dérivée de w en fonction des dérivées partielles de f et des dérivées de u et v:

$$\boxed{w'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t))u'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t))v'(t).}$$

Enfin, une propriété usuelle de la dérivation des fonctions d'une variable dit que si une fonction d'une variable atteint un extremum en un point $]a, b[$, alors sa dérivée en ce point est nulle. On a quelque chose d'équivalent pour les fonctions de plusieurs variables.
En effet, si f a par exemple un maximum en (x_0, y_0), alors la fonction partielle $g_{y_0}(x) = f(x, x_0)$ a un maximum en x_0 (pour tout x autour de x_0, $g_{y_0}(x) = f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0) = g_{y_0}(x_0)$ puisque (x_0, y_0) est un maximum de f), et donc $(g_{y_0})'(x_0) = 0$. On peut faire de même avec la fonction partielle par rapport à y, ce qui prouve le résultat suivant.

Si $f(x, y)$ atteint un extremum en (x_0, y_0) intérieur au domaine de f (i.e. f est définie tout autour de ce point et la valeur de f en ce point est minimum ou maximum), alors les dérivées partielles de f s'annulent en ce point: $$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$