Université de Montpellier II

BioMath 1 (2004-2005)

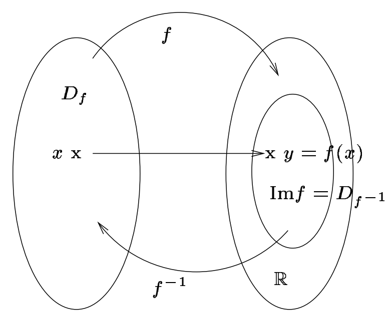
Cours: Fonctions d'une variable

Thomas Hausberger, Jérôme Droniou, Daniel Guin [1].

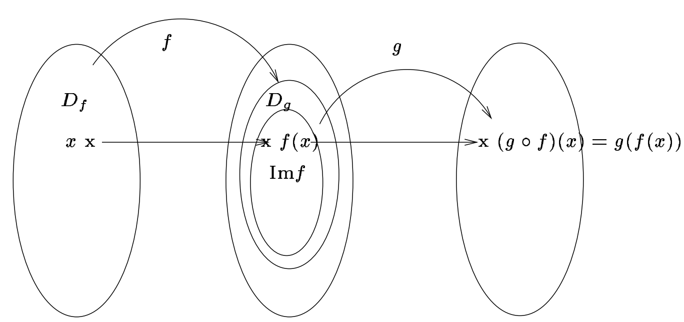
1 Généralités sur les fonctions, fonctions usuelles, limites

1.1 Définitions

On considérera ici des fonctions $f : D \to \mathbb{R}$, où D est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Une telle fonction est une loi qui, à chaque élément x de D, associe un et un seul nombre réel, noté $f(x)$. L'ensemble D, qui fait partie de la donnée de f, s'appelle le *domaine de définition* de f. Lorsque celui-ci n'est pas précisé, il est sous-entendu que D est le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ où l'expression $f(x)$ a un sens.
On appelle $f(x)$ *l'image de x par f*. L'*image de f* est l'ensemble $\{f(x),\ x \in D\}$; il est noté $f(D)$ ou encore $\mathrm{Im} f$. Si $y \in \mathbb{R}$, tout réel x de D tel que $f(x) = y$ est appelé un *antécédent* de y par f (il peut en exister plusieurs, ou aucun si l'on n'a pas pris y dans $\mathrm{Im} f$).
Si chaque élément y de $\mathrm{Im} f$ possède un unique antécédent, on dit que f réalise une *bijection* de D sur $\mathrm{Im} f$, ou encore que $f : D \to \mathrm{Im} f$ est *bijective*, et la fonction qui à y associe son unique antécédent s'appelle la *fonction réciproque* de f. Elle est notée f^{-1} ; son domaine de définition est $D_{f^{-1}} = \mathrm{Im} f$.
Attention : $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$!



Si $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $g : D_g \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions, on définit leur somme et leur produit par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ et $(fg)(x) = f(x)g(x)$ (sur $D_f \cap D_g$). Si $\mathrm{Im} f \subset D_g$, on peut définir la *composée* $g \circ f$ par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ ($x \in D_f$).

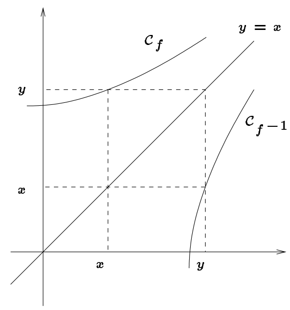


[1] Département de Mathématiques, CC 051, Université Montpellier II, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5, France. emails: hausberg@math.univ-montp2.fr, droniou@math.univ-montp2.fr, dguin@math.univ-montp2.fr

Si $f : D_f \to \mathrm{Im}f$ est bijective, de réciproque $f^{-1} : \mathrm{Im}f \to D_f$, alors $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ pour tout $x \in D_f$ et $(f \circ f^{-1})(y) = y$ pour tout $y \in \mathrm{Im}f$.
Le *graphe* de la fonction f, ou *courbe représentative* $\mathcal{C}_f$ de f, est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$, lorsque x décrit D, tracé dans un repère donné. Les graphes de f et de f^{-1}, tracés dans un repère *orthonormé*, sont symétriques par rapport à la droite $y = x$. En effet :

$$(x, y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow (y, x) \in \mathcal{C}_{f^{-1}};$$

la transformation qui à (x, y) associe (y, x) est la symétrie en question.



Une fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$ est dite *croissante* (resp *décroissante*) sur un *intervalle* I si :

$$\forall x, x' \in I\,,\quad \text{si } x \le x' \text{ alors } f(x) \le f(x') \text{ (resp. } f(x) \ge f(x')).$$

Elle est *strictement croissante* (resp. *strictement décroissante*) sur I si $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$ (resp. $f(x) > f(x')$).
Une fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$ est dite *paire* (resp. *impaire*) si :

$$\forall x \in D_f, \quad -x \in D_f \text{ et } f(-x) = f(x) \text{ (resp. } f(x) = -f(x)).$$

Graphiquement, f est paire (resp. impaire) si et seulement si $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe (Oy) (resp. l'origine).
La fonction f est dite *périodique* s'il existe un réel $T > 0$ tel que

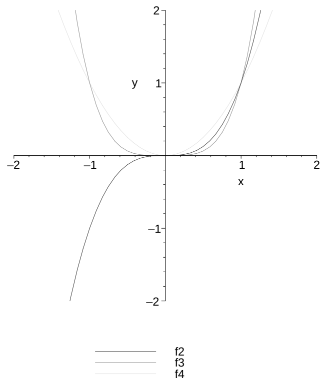
$$\forall x \in D_f, \quad x + T \in D_f \text{ et } f(x + T) = f(x).$$

Le plus petit réel $T > 0$ vérifiant cette propriété s'appelle *la période de* f. Interprétation graphique : $\mathcal{C}_f$ est invariante par translation de vecteur $T\vec{\imath}$.

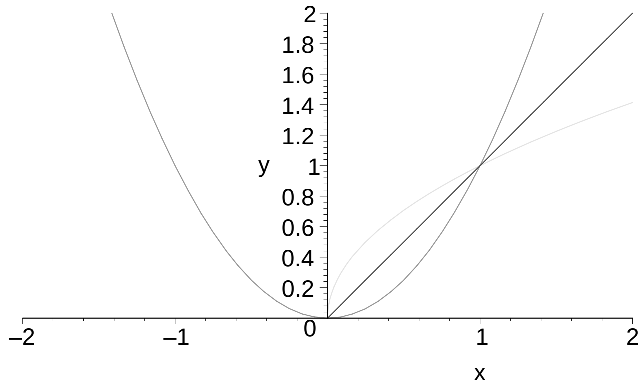
1.2 fonctions usuelles

- $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \ge 0 \\ -x & \text{si } x \le 0 \end{cases}$
- $f_n : x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ avec $D_{f_n} = \mathbb{R}$
- $g_n : x \mapsto \frac{1}{x^n} = x^{-n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ avec $D_{g_n} = \mathbb{R}^*$
- $h_n : x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$; $D_{h_n} = \mathbb{R}$ si n est impair et $D_{h_n} = \mathbb{R}_+$ si n est pair. Par exemple, $\sqrt{x}$ est l'unique réel y vérifiant $y^2 = x$ et $y \ge 0$; la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie comme la réciproque de la bijection $f_2|_{[0,+\infty[} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ (on a restreint le domaine de définition de f_2 ; en effet, f_2 ne réalise pas une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+ = \mathrm{Im}f_2$!) Par contre, f_3 réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ ([2]).
- sur $\mathbb{R}^+$, $x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}}$ $(p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*)$; on vérifie qu'on a aussi $x^{\frac{p}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p$.

[2]Voir le second polycopié



(a) courbes de f_2, f_3 et f_4

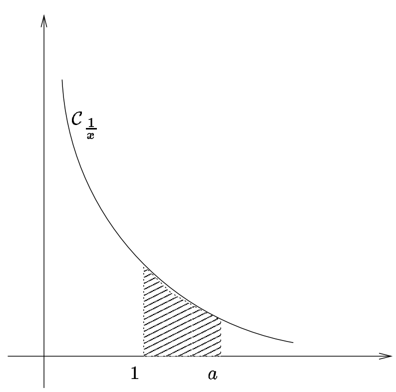


(b) courbes de f_2 et g_2

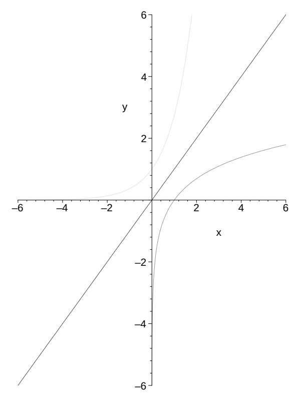
- $\ln(a) = \int_1^a \frac{1}{t}\,dt$ $(a > 0)$; c'est l'aire algébrique (i.e. comptée positivement si $a > 1$ et négativement si $a < 1$) délimitée par la courbe $\mathcal{C} : y = \frac{1}{x}$, l'axe (Ox) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = a$.

  Propriétés : $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$ et $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ (que l'on peut démontrer par des considérations d'aires) ; $\ln(a^n) = n \ln a$ $(n \in \mathbb{Z})$ (par récurrence à partir de la relation précédente).

  Graphe :



(c) définition de ln



(d) ln et exp

On note e l'unique réel tel que $\ln e = 1$. La fonction $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est bijective ; sa fonction réciproque est la fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$.

Propriétés (qui résultent de celles de ln) : $\exp 1 = e$, $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$, $\exp(-a) = \frac{1}{\exp a}$, $(\exp a)^n = \exp(na)$ $(n \in \mathbb{Z})$.

- Pour $a \in]0, +\infty[$, $a \neq 1$, on définit $a^x = \exp(x \ln a)$. En particulier, $\exp x = e^x$.

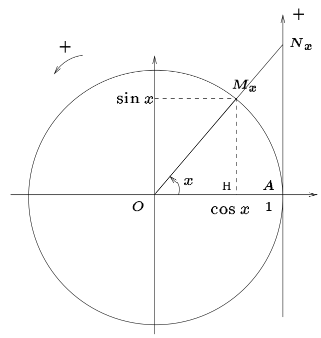
  Propriétés : $a^x a^y = a^{x+y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$, $(ab)^x = a^x b^x$.

  La fonction $\exp_a : x \mapsto a^x$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_*^+$, s'appelle l'*exponentielle de base a*. Elle est bijective ; sa fonction réciproque est la fonction $\log_a : x \mapsto \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$, de $\mathbb{R}_*^+$ dans $\mathbb{R}$. En effet,

$$y = \frac{\ln x}{\ln a} \Leftrightarrow \ln x = y \ln a \Leftrightarrow x = \exp(y \ln a) \Leftrightarrow x = a^y.$$

Graphes : cf plus loin ; ils se déduisent des graphes de ln et exp par des transformations élémentaires.

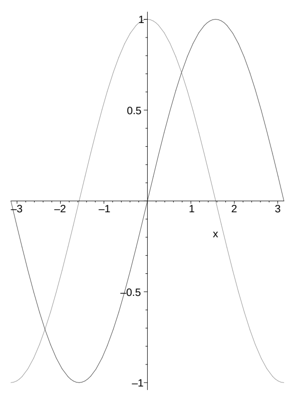
- Fonctions trigonométriques : soit $x \in \mathbb{R}$. On enroule une corde de longueur $|x|$ autour du cercle unité, à partir du point $A(0,1)$ et dans le sens du signe de x. Soit M_x le point du cercle qui coïncide avec l'extrémité de la corde ; par définition, $\cos x =$ abscisse de M_x, $\sin x =$ ordonnée de M_x ; $D_{\cos} = D_{\sin} = \mathbb{R}$.



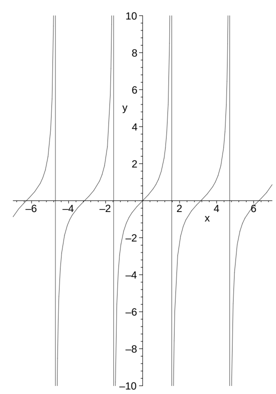
(une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_x})$ est alors x radians).

On définit également : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$; $D_{\tan} = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Graphiquement, $\tan x = \overline{AN_x}$ (distance algébrique): c'est Thalès : $\frac{M_x H}{OH} = \frac{N_x A}{OA}$.

Cosinus et sinus sont 2π-périodiques, tangente est π-périodique ; sinus et tangente sont impaires, cosinus est paire. Graphes :



(e) sin et cos



(f) tan

Formulaire :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos(x+\pi) = -\cos x \ ; \ \sin(x+\pi) = -\sin x \ ; \ \tan(x+\pi) = \tan x$$

$$\cos(x+\tfrac{\pi}{2}) = -\sin x \ ; \ \sin(x+\tfrac{\pi}{2}) = \cos x \ ; \ \tan(x+\tfrac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\tan x}$$

$$\cos(\tfrac{\pi}{2}-x) = \sin x \ ; \ \sin(\tfrac{\pi}{2}-x) = \cos x \ ; \ \tan(\tfrac{\pi}{2}-x) = \frac{1}{\tan x}$$

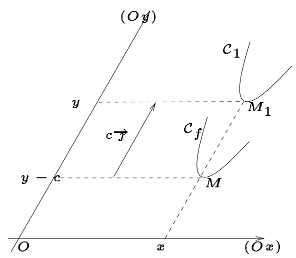
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \ ; \ \sin(2x) = 2\cos x \sin x \ ; \ \tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \ ; \ \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \ ; \ \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

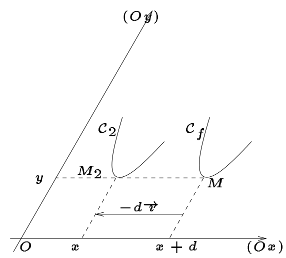
Application : $f(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ s'écrit aussi $f(t) = C\cos(\omega t + \varphi)$, où (A,B) et (C,φ) sont reliés par : $C = \sqrt{A^2+B^2}$, $\cos\varphi = \frac{A}{C}$ et $\sin\varphi = \frac{B}{C}$ (φ est défini à 2π près).

1.3 Transformations élémentaires sur les graphes

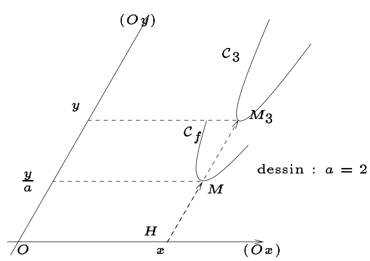
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $\mathcal{C} : y = f(x)$ son graphe, tracé dans un repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. On définit $g_1(x) = f(x) + c$, $g_2(x) = f(x + d)$, $g_3(x) = af(x)$ et $g_4(x) = f(bx)$, de graphes respectifs $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$. Nous allons voir que les graphes $\mathcal{C}_i$ se déduisent de $\mathcal{C}$ par des transformations élémentaires.



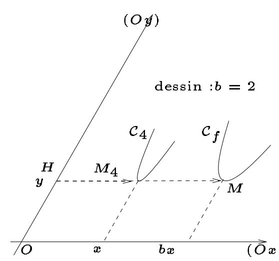
(g) $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1$



(h) $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_2$



(i) $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_3$



(j) $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_4$

- $M_1(x,y) \in \mathcal{C}_1 \Leftrightarrow y = f(x) + c \Leftrightarrow y - c = f(x) \Leftrightarrow M(x, y - c) \in \mathcal{C}$; $M_1 = t_{c\overrightarrow{\jmath}}(M)$, donc $\mathcal{C}_1$ se déduit de $\mathcal{C}$ par translation de vecteur $c\overrightarrow{\jmath}$.
- $M_2(x,y) \in \mathcal{C}_2 \Leftrightarrow y = f(x+d) \Leftrightarrow M(x+d, y) \in \mathcal{C}$; $M_2 = t_{-d\overrightarrow{\imath}}(M)$, donc $\mathcal{C}_2$ se déduit de $\mathcal{C}$ par translation du vecteur $-d\overrightarrow{\imath}$.
- $M_3(x,y) \in \mathcal{C}_3 \Leftrightarrow y = af(x) \Leftrightarrow \frac{y}{a} = f(x) \Leftrightarrow M(x, \frac{y}{a}) \in \mathcal{C}$. La transformation qui à M associe M_3 s'appelle l'*affinité d'axe (Ox), de direction (Oy) et de rapport a* : M_3 est défini par $\overrightarrow{HM_3} = a\overrightarrow{HM}$, où H est le projeté de M sur (Ox) parallèlement à (Oy). $\mathcal{C}_3$ est l'image de $\mathcal{C}$ par cette affinité (notée $a_{((Ox),(Oy),a)}$), qui consiste donc à dilater d'un facteur a dans la direction de l'axe (Oy).
- $M_4(x,y) \in \mathcal{C}_4 \Leftrightarrow y = f(bx) \Leftrightarrow M(bx, y) \in \mathcal{C}$; $\mathcal{C}_4 = a_{((Oy),(Ox),\frac{1}{b})}(\mathcal{C})$: $\mathcal{C}_4$ se déduit de $\mathcal{C}$ par dilatation d'un facteur $\frac{1}{b}$ dans la direction de l'axe (Ox).

Applications:

i) graphe des fonctions $\log_a$ et $\exp_a$. On a $\log_a : \mathbb{R}_+ \ni x \mapsto \frac{\ln x}{\ln a}$ (avec $a \in]0, +\infty[, a \neq 1$), donc $\mathcal{C}_a : y = \log_a(x)$ se déduit de $\mathcal{C}_e$ par $a_{((Ox),(Oy),r=\frac{1}{\ln a})}$; si $0 < a < 1$ alors $r < 0$; si $a > 1$ alors $r > 0$.

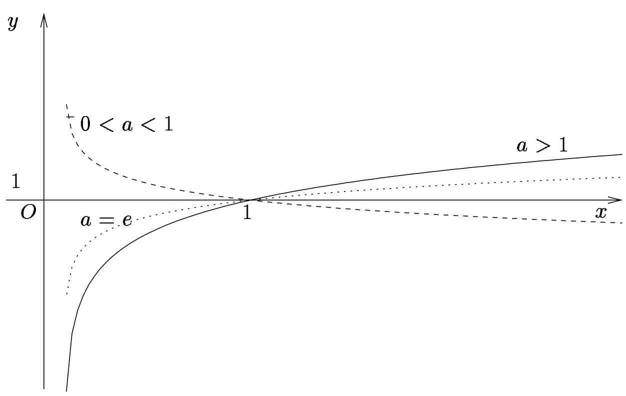
   On a $\exp_a : \mathbb{R} \ni x \mapsto a^x = e^{x \ln a}$, donc $\mathcal{C}'_a : y = a^x$ se déduit de $\mathcal{C}'_e$ par $a_{((Oy),(Ox),\frac{1}{\ln a})}$. Bien sûr, $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{C}'_a$ sont symétriques par rapport à $y = x$.

ii) fonctions homographiques : $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$, sinon on obtiendrait une fonction affine $f(x) = \alpha x + \beta$) ; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{-d}{c}\}$.

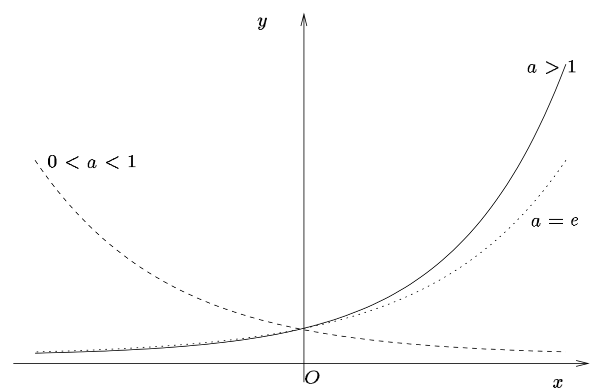
Traitons l'exemple suivant : $f(x) = \frac{3x+1}{2x+1}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{-1}{2}\}$. La division euclidienne des polynômes donne : $3x + 1 = \frac{3}{2}(2x+1) - \frac{1}{2}$, d'où $\frac{3x+1}{2x+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2(2x+1)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}\frac{1}{x+\frac{1}{2}}$. La fonction $f(x)$ se fabrique pas à pas à partir de $g(x) = \frac{1}{x}$ comme suit : on construit d'abord $g_1(x) = \frac{1}{x+\frac{1}{2}} = g(x+\frac{1}{2})$, puis $g_2(x) = -\frac{1}{4}g_1(x)$, enfin $f(x) = g_2(x) + \frac{3}{2}$. Au niveau des graphes : $\mathcal{C}_{g_1} = t_{-\frac{1}{2}\vec{\imath}}(\mathcal{C}_g)$; $\mathcal{C}_{g_2} = a_{((Ox),(Oy),\frac{-1}{4})}(\mathcal{C}_{g_1})$; $\mathcal{C}_f = t_{\frac{3}{2}\vec{\jmath}}(\mathcal{C}_{g_2})$.

Le cas général se traite de la même manière ; pour tracer le graphe d'une fonction homographique en général, on procède donc comme suit :

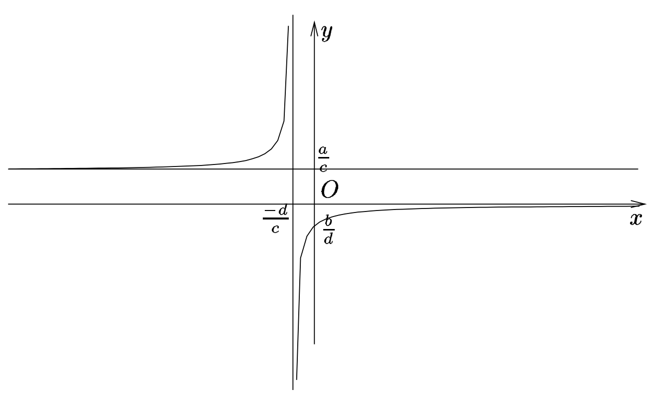
- on trace les asymptotes $x = \frac{-d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$ (qui sont les axes de l'hyperbole)
- on place le point $(0, f(0) = \frac{b}{d})$
- on trace les branches de l'hyperbole



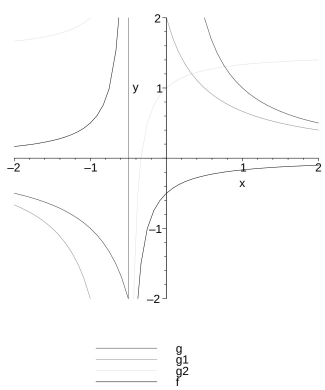
(k) courbes $\mathcal{C}_{\log_a}$



(l) $\mathcal{C}_{\exp_a}$



(m) tracé d'une fonction homographique



(n) courbes $\mathcal{C}_{g_i}$

1.4 limites

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et f une fonction définie sur I, sauf éventuellement en x_0. On dit que *f tend vers une limite l quand x tend vers x_0* si $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de l pour *tous* les x assez proches de x_0. De manière rigoureuse, on dit: "pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, dès que x est dans le domaine de f et à distance inférieure à α de x_0, alors $f(x)$ est à distance inférieure à ϵ de l"; on peut dire cela en abrégé de la manière suivante:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad | \quad \forall x \in D_f \quad (|x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon)$$

On écrit : $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.
Exemples :

a) $f(x) = x$; $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

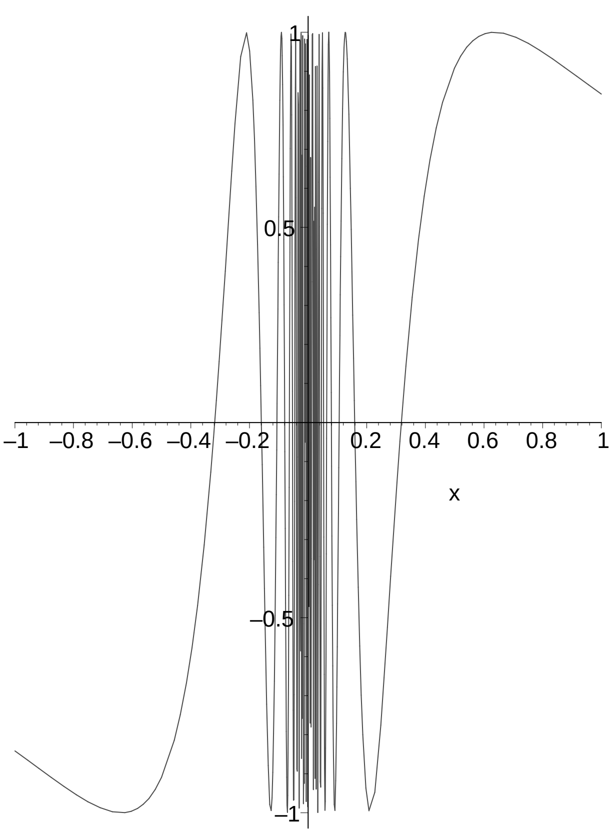
b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

$\lim_{x \to 0} f(x)$ n'existe pas, mais on dit que f possède une limite à gauche en 0 (on fait tendre x vers 0 avec $x < 0$) et une limite à droite en 0 (idem avec $x > 0$) ; on écrit $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ et $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$.

c) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

$\lim_{x \to 0} f(x)$ n'existe pas, mais $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$.

d) $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ $(x \neq 0)$ ne possède pas de limite en $x = 0$, ni à droite, ni à gauche (elle oscille indéfiniment entre -1 et 1, de plus en plus vite quand on s'approche de 0):



Ce dessin vous renseigne-t-il vraiment sur l'eventuelle limite en 0 ?

On définit également des limites infinies : $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ et des limites à l'infini : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = l$ ou $\pm\infty$

Opérations sur les limites:

- *Somme de limites :*

Limite de f	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Limite de g	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Limite de $f+g$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	??

- *Produit de limites :*

Limite de f	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Limite de g	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
Limite de fg	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	??

- *Inverse d'une limite :*

Limite de f	$l \neq 0$	∞	$\pm\infty$	0^+	0^-	0
Limite de $\frac{1}{f}$	$\frac{1}{l}$	0	$0^\pm$	$+\infty$	$-\infty$	??

Les cases ?? correspondent aux formes indéterminées ; ce sont :

$$\boxed{+\infty - \infty\,; \quad 0\cdot\infty\,; \quad \tfrac{1}{0}\,; \quad \tfrac{\infty}{\infty}\,; \quad \tfrac{0}{0}.}$$

Limites et composition:

- Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ et $\lim_{y\to y_0} g(y) = l$, alors $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = l$ (en supposant que cette composition est définie).

Limites et inégalités :

- si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I - \{x_0\}$ et f, g admettent des limites en x_0, alors $\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$
- (théorème des gendarmes) si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ pour tout $x \in I - \{x_0\}$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = l$, alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$
- si $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in I - \{x_0\}$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

Remarque 1 *Ces résultats s'appliquent également au cas des limites à l'infini, i.e. lorsque $x_0 = +\infty$ (resp. $-\infty$) en remplaçant " pour tout $x \in I - \{x_0\}$" par "pour tout $x > A$ (resp. $\forall x < A$)", où l'on suppose les fonctions définies sur $]A, +\infty[$ (resp. $]-\infty, A[$).*

Limites des fonctions usuelles : on a

- fonction puissance x^α $(\alpha \neq 0)$:

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ 0 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

- $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.
- $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$; $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

Règle des limites en 0 et $\pm\infty$ des fractions rationnelles :

- $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\text{mônome de plus haut degré de } P}{\text{mônome de plus haut degré de } Q}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{mônome de plus bas degré de } P}{\text{mônome de plus bas degré de } Q}$

Remarque 2 *Méthode générale qui permet de retrouver et démontrer ces deux règles : dans chaque terme (numérateur et dénominateur), on met celui qui l'emporte en facteur.*

Croissance comparée à l'inifini de exp, ln **et** x^α **:** (limites à priori "indéterminées", de la forme $\frac{\infty}{\infty}$ ou $0 \cdot \infty$) :

- "l'exponentielle l'emporte sur la puissance en $+\infty$" :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty. \tag{1}$$

- "la puissance l'emporte sur le logarithme en $+\infty$" :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad (\alpha > 0). \tag{2}$$

- également :

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0 \quad (\alpha > 0)$$

(obtenue à partir de (2) en faisant le "changement de variable" $X = 1/x$; cela revient à utiliser la règle de composition) et :

$$\lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha e^x = 0$$

(obtenue à partir de (1) en faisant le changement de variable $X = -x$)