Quelques Problèmes et exercices

Alain Yves LE ROUX
Cours de DEA

Bordeaux, Novembre 1999

Problème 1-

On se donne une fonction $f \in C^1(\mathbb{R})$, et on considère le problème du premier ordre suivant, sur un intervalle réel $\Omega =]a, b[$,

$$u_t \; + \; f(u)_x \; = \; 0 \qquad \textit{pour } t > 0, \; x \in \Omega,$$

$$u(x,0) \; = \; u_0(x) \qquad x \in \Omega,$$

avec $u_0 \in BV(\Omega)$, et des conditions homogènes, de type $u = 0$, en $x = a$ et en $x = b$. On suppose $u_0(a) = u_0(b) = 0$.

1 ° - Donner l'écriture correcte des conditions aux limites en $x = a$ et $x = b$.

2 ° - Rappeler la définition d'une solution entropique.

3 ° - On note $S(t)$ l'opérateur de semi groupe associé. rappeler les propriétés de stabilité de $S(t)$ dans $L^1(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$ et $BV(\Omega)$.

4 ° - Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose $\Delta x = \dfrac{b-a}{N}$ et $x_i = a + i\Delta x, \; 0 \le i \le N$. On définit ensuite les mailles $M_j =]x_i, x_{i+1}[\;\; (j = i + \frac{1}{2})$ et l'espace

$$V_0 \; = \; \Big\{ v \in L^\infty(\Omega) \; | \; v|_{M_j} \; \textit{constante} \; \Big\}$$

On note P_0 l'opérateur de projection orthogonale (associée au produit scalaire $L^2(\Omega)$). Rappeler les propriétés de stabilité de P_0 dans $L^1(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$, $BV(\Omega)$.

5 ° - Soit Δt le pas de discrétisation en temps. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $t_n = n\Delta t$ et on note $u^n \in V_0$ l'approximation de la solution au temps t_n, prolongée par zéro hors de Ω.

Soit $n \ge 1$. On suppose connu $u^{n-1} \in V_0$, et on construit $u^n \in V_0$ de la façon suivante. Si u_j^{n-1} est la valeur de u^{n-1} sur M_j, on pose

$$x^n_{-\frac{1}{2}} \; = \; a - \frac{\Delta x}{2} \;\; ; \;\; x^n_j \; = \; x_i + \frac{\Delta x}{2} \; + \; \Delta t \; f'(u_j^{n-1}) \;\; (\frac{1}{2} \le j \le N - \frac{1}{2}) \;\; ; \; x^n_{N+\frac{1}{2}} = \; b \; + \; \frac{\Delta x}{2} \; .$$

On suppose $\forall j \quad x^n_{j+1} > x^n_j$, et on construit l'espace

$$V_n \; = \; \Big\{ \; v \in L^\infty(]a - \frac{\Delta x}{2}, b + \frac{\Delta x}{2}[) \; | \; v \; \textit{constant sur} \;]x^n_j, x^n_{j+1}[\; \Big\}$$

Typeset by the TEX-preprocessor PreTEX

puis P_n l'opérateur de projection orthogonale associé. On construit u^n par le schéma

$$u^n \;=\; P_0 \, P_n \, S(\Delta t) \, u^{n-1} \; .$$

Expliciter P_n et montrer que le schéma est stable dans L^∞ et BV, puis en déduire un résultat de convergence (sans détailler la démonstration).
6 ° - La condition $x_{j+1}^n > x_j^n$ correspond à une condition de stabilité (L). Expliciter cette condition et comparer avec la condition (CFL) classique (est elle plus avantageuse ?).
7 ° - On pose

$$v^n \;=\; P_n \, S(\Delta t) \, u^{n-1} \;\; .$$

Expliciter v^n lorsque la condition (L) est satisfaite (on notera $g(u) = f(u) - uf'(u)$). Expliciter le cas particulier de l'équation de Burgers ($f(u) = \frac{u^2}{2}$).
8 ° - En considérant le cas particulier $f(u) = 0$, évaluer la diffusion due à la double projection, puis proposer une méthode stable de réduction de cette diffusion.

Problème 2-

Soit $k \in \mathbb{R}$. On considère le systéme d'équations linéaires, sur $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} u_t \,+\, v_x \,&=\, 0 \\ v_t \,+\, u_x \,&=\, kv \end{aligned}$$

1 ° - Montrer que le problème est strictement hyperbolique.
2 ° - Construire un solveur de Riemann lorsque $k = 0$.
3 ° - Pour $k \neq 0$, expliciter une onde régulière (indication : poser $v = v(u)$, puis introduire une fonction $\psi(u)$ telle que $\psi(u)_x = k$). En déduire la forme d'une onde solitaire, de vitesse A, puis expliciter le cas d'une onde stationnaire (lorsque $A = 0$).
4 ° - En approchant convenablement k (on notera Δx le pas de discrétisation) construire un solveur équilibre. Ce solveur a t il une solution pour toutes les valeurs de k ? Proposer une condition sur Δx qui assure l'existence.
5 ° - Expliciter le schéma de Godunov dans le cas du solveur équilibre.

Problème 3-

Soit $k \in \mathbb{R}$. On considére le système d'équations non linéaires

$$\begin{aligned} u_t \,+\, v_x \,&=\, 0 \\ v_t \,+\, (\tfrac{u^3}{3})_x \,&=\, kv \end{aligned}$$

1 ° - Etudier ce système du point de vue de l'hyperbolicité. (Indication : noter $\lambda_- = -|u|$, et $\lambda_+ = |u|$ les vitesses de propagation des différentes ondes).
2 ° - Faire l'analyse d'une onde de choc.
3 ° - Faire l'analyse d'une onde détente dans le cas $k = 0$.
4 ° - Pour $k = 0$, les ondes sont elles soit exclusivement des chocs, soit exclusivement des détentes (autrement dit : y a t il des ondes mixtes) ?
5 ° - Construire une matrice de Roe associée à ce système, et un solveur de Roe dans le cas $k = 0$.

6 ° - Pour $k \neq 0$, et en s'inspirant du problème 2, construire un "solveur de Roe équilibre".
7 ° - Toujours pour $k \neq 0$, construire une onde régulière, puis obtenir l'expression d'une onde solitaire, de vitesse notée A.
8 ° - Construire un solveur équilibre, et proposer une méthode de résolution pour ce solveur.
9 ° - Expliciter le schéma de Godunov équilibre.
10 ° - Reprendre les problèmes 2 et 3 en remplaçant kv par ku au second membre.