Chapitre 7 : Dérivation des fonctions réelles

(cours)

1 Contenu du cours

Définition

$$f(x) - f(a) = (x - a)\varphi(x)$$

avec φ continue en a. On a alors unicité de φ et $f'(a) = \varphi(a)$
Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis
Fonctions à dérivée de signe constant sur un intervalle
Propriétés : sommes, produits, inverses composition fonctions réciproques
Formule de Leibnitz
Fonctions particulières : Arcsin, Arccos, Arctan
Etude des fonctions : tableau de variations, limites, asymptotes courbure.

2 Exercices

2.1 Raccords de fonctions indéfiniment dérivables

Soit f, une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = e^{1/t}$ si $t < 0$ $f(t) = 0$ si $t \geq 0$
i) Demontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en $t = 0$
ii) Etudiez l'existence de $f''(0)$
iii) Demontrer par récurrence sur n que pour tout $t < 0$, $f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{1/t}$ où $P_n(t)$ est un polynome dont on précisera le degré. Donnez P_1 et P_2.
iv) Montrer alors que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$

2.2 Asymptotes, symétrie

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$. Etudier la fonction f, montrer qu'elle admet des asymptotes et un axe de symétrie.

2.3 Dérivabilité, valeur absolue

Etudier, selon la valeur du paramètre $a > 0$, la dérivabilité de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|^a$

2.4 Propriétés de dérivées

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et soient f et g deux fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$, avec

$$\forall x \in]a, b[,\ g'(x) \neq 0.$$

i) Montrer que

$$\forall x \in]a, b],\ g(x) - g(a) \neq 0.$$

ii) En considérant les propriétés de la fonction u de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x)$, montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

2.5 Formules d'accroissements finis

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et soit f une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$ et deux fois dérivable sur $]a,b[$. Soit $x_0 \in]a,b[$.
i) Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x_0) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_0 - a) + \frac{(x_0-a)(x_0-b)}{2} A.$$

ii) On définit la fonction $\varphi \ : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant, pour tout $x \in [a,b]$,

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - \frac{(x-a)(x-b)}{2} A.$$

Calculer, pour tout $x \in]a,b[$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$.
iii) Montrer qu'il existe $c \in]a,x_0[$ et $d \in]x_0,b[$ tels que $\varphi'(c) = \varphi'(d) = 0$. En déduire qu'il existe $\theta \in]a,b[$ tel que

$$f(x_0) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_0 - a) + \frac{(x_0-a)(x_0-b)}{2} f''(\theta)..$$

2.6 Etude de fonction

Etudier et représenter graphiquement la fonction $f \ : \mathbb{R}+_* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x} - \ln x$.

2.7 Etude de fonction

Etudier et représenter graphiquement la fonction $f \ : \mathbb{R}+_* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{-\ln x}$.

2.8 Applications des accroissements finis

Soit α un réel strictement positif donné. Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $x > 1$. Montrer qu'il existe $c \in]x^{\alpha/2}, x^\alpha[$ tel que

$$\ln(x^\alpha) - \ln(x^{\alpha^2}) = (x^\alpha - x^{\alpha^2})\frac{1}{c}.$$

En déduire la preuve que $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.

2.9 Application du théorème de Rolle

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et soient a et b deux nombres réels donnés. Soit P la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par $x \mapsto P(x) = x^n + ax + b$.
i) Discuter le nombre de racines de P' selon n et a.
ii) En déduire que quand n est pair, P a au plus deux racines réelles et quand n est impair, P a au plus trois racines réelles.

2.10 Etude de continuité et dérivabilité

Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction $f \ : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos\sqrt{x}$.

2.11 Dérivée de fonctions réciproques

Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x + e^x$ est strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note g sa réciproque $g = f^{-1}$. Calculer $g'(1)$ et $g''(1)$.

2.12 Limite de dérivées

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}_*$, telle qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = l$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle de points non nuls convergente vers 0. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{f(u_n)-f(0)}{u_n}$.
i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $v_n \in \mathbb{R}_*$ avec $|v_n| \leq |u_n|$ et $f'(v_n) = w_n$.
ii) En déduire que f est dérivable en 0 et que sa dérivée vaut l.

2.13 Formule de Leibniz

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^x$. En utilisant la formule de Leibniz, calculer $f^{(n)}(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2.14 Suites récurrentes et étude de fonction

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle donnée par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$. Etudier la convergence de la suite.

2.15 Suites et accroissements finis

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle donnée par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \cos u_n$.
i) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
ii) Montrer qu'il existe une et une seule valeur $l \in [0, 1]$ telle que $l = \cos l$.
iii) Montrer, à l'aide du théorème des accroissements finis, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - l| \leq (\sin 1)|u_n - l|$. Conclure sur la convergence de la suite.

2.16 Etude de fonction

Etudier la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x \arctan x$.

2.17 Théorème de Rolle

Soit $a \in \mathbb{R}_*^+$ et $g : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $[-a, a]$. Soient
$M = \sup\{y \in \mathbb{R}, \exists x \in [-a, a], y = g(x)\}$ et $m = \inf\{y \in \mathbb{R}, \exists x \in [-a, a], y = g(x)\}$.
i) Montrer que si $m < g(-a) < M$ et $m < g(a) < M$, alors il existe $x_0 \in]-a, a[$ tel que $g''(x_0) = 0$.
ii) Montrer que si g est impaire, c'est à dire que pour tout $x \in [-a, a]$, $g(-x) = -g(x)$, alors $m = -M$ et $g''(0) = 0$.
iii) Donner un exemple de fonction g tel que $g(a) = m$ et pour tout $x \in [-a, a]$, $g''(x) < 0$.

2.18 Etude de fonction

Etudier la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(e^x + 2e^{-x})$.

2.19 Accroissements finis

Soit $f\ :\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, supposée deux fois dérivable, telle que $f(0)=0$ et $f''>0$ sur $\mathbb{R}$.
i) Calculer les dérivées première et seconde de la fonction $\psi\ :[0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$, $x\mapsto\frac{f(x)}{x}$ si $x>0$ et $\psi(0)=f'(0)$. Montrer que cette fonction est continue et strictement croissante.
ii)a) Pour $x\in]0,+\infty[$, prouver qu'il existe $c\in]0,x[$ tel que $f(x)=xf'(c)$.
ii)b) Prouver l'unicité du réel c dont l'existence est donnée par la question précédente.
iii) Soit $g\ :[0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$, $0\mapsto 0$, et pour tout $x\in]0,+\infty[$, $x\mapsto c$, valeur réelle dont l'existence et l'unicité en fonction de x sont données par les questions ii)a) et ii)b).
iii)a) Prouver que g est strictement croissante et continue.
iii)b) Prouver que g est dérivable sur $]0,+\infty[$.
iii)c) Prouver que $\lim_{x\to 0}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}f''(0)$ et que $\lim_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=\dfrac{1}{2}$. En déduire que g possède une dérivée à droite en 0.

3 Correction d'exercices

Correction de l'exercice 2.1

i) Il faut d'abord vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}$. Elle l'est en dehors de 0. Comme on a $\lim_{t\to 0,t<0}e^{1/t}=0$, elle est bien continue en 0. Soit $t\in\mathbb{R}$. La fonction étant constante sur $]0,+\infty[$, elle est dérivable et sa dérivée vaut 0. La fonction est dérivable sur $]-\infty,0[$ par composition de fonctions dérivables, et sa dérivée vaut $f'(t)=-\frac{1}{t^2}e^{1/t}$. Etudions, pour $t\in\mathbb{R}_*$, la fonction $\phi(t)=\frac{f(t)-f(0)}{t-0}$. Pour tout $t>0$, $\phi(t)=0$. Pour tout $t<0$, $\phi(t)=\frac{1}{t}e^{1/t}$. Or on sait que la fonction x est négligeable devant e^x au voisinage de $+\infty$, donc en posant $x=-\frac{1}{t}$ on obtient $\lim_{t\to 0,t<0}\dfrac{1}{t}e^{1/t}=0$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.

ii) La fonction $f'\ :\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, est définie par $f'(t)=-\frac{1}{t^2}e^{1/t}$ pour tout $t<0$ et par $f'(t)=0$ pour $t\geq 0$. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}_*$, continue (car $\lim_{t\to 0,t<0}-\dfrac{1}{t^2}e^{1/t}=0$). On a, pour tout $t<0$, $f''(t)=(\frac{2}{t^3}+\frac{1}{t^4})e^{1/t}=(\frac{2t+1}{t^4})e^{1/t}$. Une étude similaire à i) montre que $f''(0)$ existe et $f''(0)=0$.

iii) La formule de récurrence est établie pour les valeurs 1 et 2, avec $P_1(t)=-1$ de degré 0, et $P_2(t)=2t+1$, de degré 1. Supposons que au rang n, $f^{(n)}(t)=\frac{P_n(t)}{t^{2n}}e^{1/t}$ pour tout $t<0$ (où $f^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de f en t) où $P_n(t)$ est un polynome de degré $n-1$. On a alors

$$f^{(n+1)}(t)=(f^{(n)})'(t)=(\frac{P_n'(t)}{t^{2n}}-2n\frac{P_n(t)}{t^{2n+1}}-\frac{P_n(t)}{t^{2n+2}})e^{1/t}.$$

Donc

$$f^{(n+1)}(t)=(\frac{t^2P_n'(t)-(2nt+1)P_n(t)}{t^{2n+2}})e^{1/t}.$$

On pose donc $P_{n+1}(t)=t^2P_n'(t)-(2nt+1)P_n(t)$, qui est bien un polynome, puisque P_n' est un polynome. Si le terme de plus haut degré de P_n s'écrit at^{n-1}, celui de P_{n+1} s'écrira $(n-1)at^n-2ntat^{n-1}=-a(n+1)t^n$. Donc le polynome P_{n+1} est bien de degré n. Cela montre la formule de récurrence au rang $n+1$.

Commentaire : il ne vous est pas indispensable de comprendre la preuve que le degré de P_n vaut $n-1$.

Cela sera plus clair pour vous quand vous verrez les polynomes en algèbre.

iv) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que f admet une dérivée n-ième en tout point de $\mathbb{R}$ telle que $\forall t \geq 0$, $f^{(n)}(t) = 0$: c'est vrai pour $n = 1$. Supposons que ce soit vrai au rang n. La question iii) montre que pour tout $t < 0$, $f^{(n+1)}(t)$ est bien définie. Pour tout $t > 0$, on a par hypothèse de récurrence $f^{(n)}(t) = 0$ donc $f^{(n+1)}(t) = 0$. Il faut faire l'étude en 0. On forme, comme dans la question i), le taux d'accroissement $\psi(t) = \frac{f^{(n)}(t) - f^{(n)}(0)}{t-0}$. Comme dans la question i), ce taux est nul pour $t > 0$, et s'écrit, d'après la question iii), $\psi(t) = \frac{1}{t} f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n+1}} e^{1/t}$. La fonction $P_n(t)$ est continue en 0 et admet donc la limite $P_n(0)$ en 0. La fonction x^{2n+1} est négligeable devant e^x au voisinage de $+\infty$, donc en posant $x = -\frac{1}{t}$ on obtient $\displaystyle\lim_{t \to 0, t<0} \frac{1}{t^{2n+1}} e^{1/t} = 0$, ce qui prouve que $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et $(f^{(n)})'(0) = f^{(n+1)}(0) = 0$.

Correction de l'exercice 2.2

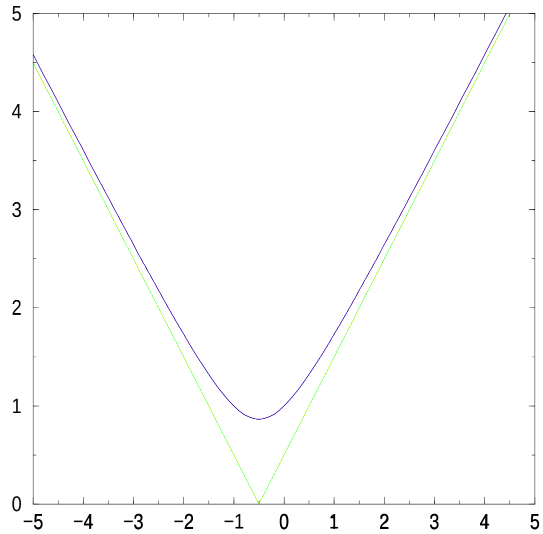
La fonction est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, car $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ est toujours strictement positive. Elle est continue et dérivable par composée de fonctions continues et dérivables, et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Montrons que l'axe d'équation $x = -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie. Rappel : l'axe d'équation $x = a$ est un axe de symétrie ssi $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2a - x) = f(x)$. On a bien, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(-1-x) = \sqrt{(-1-x)^2 + (-1-x) + 1} = \sqrt{1 + 2x + x^2 - 1 - x + 1} = f(x)$.
On peut donc n'étudier la fonction que sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}, +\infty[$. On a alors le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

On étudie alors l'existence d'une asymptote de f au voisinage de $+\infty$. On a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et de plus $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \frac{1}{2}$ (par multiplication par le binome conjugué). On trouve donc que f admet l'asymptote d'équation $y = x + \frac{1}{2}$. On calcule ensuite $f(x) - x - \frac{1}{2}$. On trouve que c'est positif pour x assez grand, ce qui montre que f est au-dessus de l'asymptote. On trouve finalement la courbe représentative suivante :



Courbe représentative de f

Correction de l'exercice 2.3

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ quelle que soit la valeur de $a > 0$ (elle vaut 0 en $x = 0$). Elle est dérivable pour $x > 0$, et sa dérivée vaut $f'(x) = ax^{a-1}$. Pour $x < 0$, on a $f(x) = (-x)^{a-1}$, donc $f'(x) = -a(-x)^{a-1} = -a\ |x|^{a-1}$. En $x = 0$, on a :
Pour $a \in]0,1[$, $\displaystyle\lim_{x\to 0, x>0} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0, x<0} \frac{f(x)}{x} = -\infty$. Elle n'est donc pas dérivable en 0.
Pour $a = 1$, $\displaystyle\lim_{x\to 0, x>0} \frac{f(x)}{x} = +1$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0, x<0} \frac{f(x)}{x} = -1$. Elle n'est donc pas dérivable en 0.
Pour $a \in]1,+\infty[$, $\displaystyle\lim_{x\to 0, x>0} \frac{f(x)}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0, x<0} \frac{f(x)}{x} = 0$. Elle est donc dérivable en 0, et $f'(0) = 0$.

Correction de l'exercice 2.4

i) Supposons qu'il existe une valeur $x \in]a,b[$, telle que $g(x) = g(a)$. La fonction g est alors continue sur $[a,x]$, dérivable sur $]a,x[$ et vérifie $g(a) = g(x)$. Le théorème de Rolle nous permet d'affirmer qu'il existe $c \in]a,x[\subset]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse sur g. Donc il n'existe pas de valeur $x \in]a,b[$, telle que $g(x) = g(a)$, ce qui prouve le résultat demandé.
ii) La fonction u est continue sur $[a,b]$ par somme de fonctions continues, et dérivable sur $]a,b[$ par somme de fonctions dérivables. Elle vérifie $u(b) - u(a) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(b) - g(a)) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $u'(c) = 0$. Or $u'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c)$, ce qui prouve le résultat demandé.

Correction de l'exercice 2.5

i) Le nombre A existe car $(x_0 - a)(x_0 - b) \neq 0$.
ii) La fonction φ est continue sur $[a,b]$ et dérivable deux fois sur $]a,b[$, avec pour tout $x \in]a,b[$,

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - \frac{2x - (a + b)}{2} A,$$

et

$$\varphi''(x) = f''(x) - A.$$

iii) On a $\varphi(a) = \varphi(b) = \varphi(x_0) = 0$ par définition de la fonction φ. Comme φ est dérivable sur $]a, x_0[$ et sur $]x_0, b[$, en appliquant pour chacun de ces intervalles le théorème de Rolle, on montre bien qu'il existe $c \in]a, x_0[$ et $d \in]x_0, b[$ tels que $\varphi'(c) = \varphi'(d) = 0$. La fonction φ' est continue sur $[c, d]$ (puisqu'elle est dérivable sur $]a, b[$) et dérivable sur $]c, d[$. En appliquant le théorème de Rolle, on en déduit qu'il existe $\theta \in]a, b[$ tel que $\varphi''(\theta) = 0$, donc $A = f''(\theta)$, ce qui montre la propriété demandée.

Correction de l'exercice 2.6

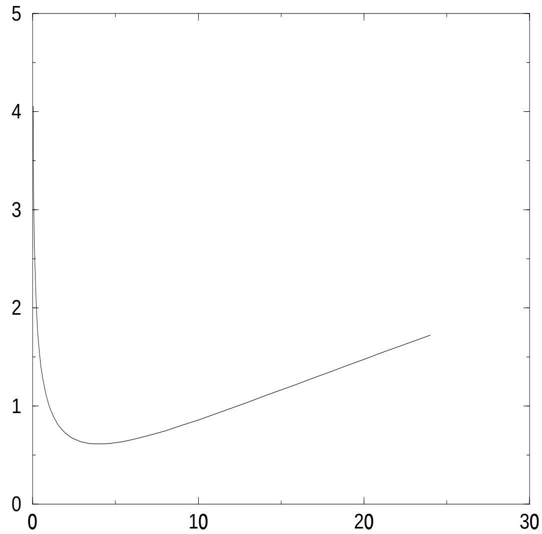
La fonction f est bien définie dans $\mathbb{R}_*^+$, puisque $\ln x$ est définie pour $x \in \mathbb{R}_*^+$ et $\sqrt{x}$ est défini pour $x \in \mathbb{R}^+$. Elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ comme somme de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}+_*$. Sa dérivée vaut $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{2x}$. Sa dérivée seconde vaut $f''(x) = \dfrac{4 - \sqrt{x}}{4x^2}$, change de signe et s'annule pour la valeur 16 (il y a donc un point d'inflexion). On trouve les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$, et comme $f(x) = \sqrt{x}(1 - \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}})$, on voit que f est équivalente à $\sqrt{x}$ au voisinage de $+\infty$. L'indétermination est donc levée et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Comme $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}(1 - \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}})$, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. La branche infinie de la fonction f est donc une branche parabolique tournée vers la direction Ox.

On n'étudie les branches infinies que des fonctions qui tendent vers l'infini à l'infini ! Rien de tel n'est à faire si la limite de la fonction est une valeur finie, car alors l'asymptote est la droite horizontale à l'ordonnée de la limite.

On obtient le tableau de variations suivant.

x	0		4		16		$+\infty$
$f''(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\frac{1}{16}$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2(1 - \ln 2)$	$\nearrow$	$4(1 - \ln 2)$	$\nearrow$	$+\infty$

La courbe représentative de f est la suivante :



Courbe représentative de f

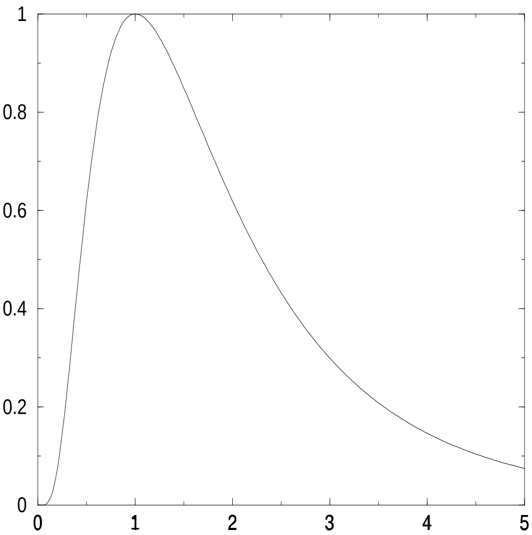
Correction de l'exercice 2.7

La fonction $f(x) = \exp(-(\ln x)^2)$ est bien définie pour $x \in \mathbb{R}+_*$, puisque $\ln x$ est définie pour $x \in \mathbb{R}+_*$. Elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}+_*$ comme composition de fonctions continues et dérivables. Sa dérivée vaut $f'(x) = \dfrac{-2\ln x}{x}\exp(-(\ln x)^2)$. Sa dérivée seconde vaut $f''(x) = \dfrac{4(\ln x)^2 + 2\ln x - 2}{x^2}\exp(-(\ln x)^2)$, change de signe et s'annule pour les valeurs e^{-1} et $e^{1/2}$ (il y a donc deux points d'inflexion). On trouve les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. On prolonge f par continuité en 0 par la valeur 0. On examine alors la dérivée en 0, et on trouve $\dfrac{f(x)}{x} = 0$, donc il y a une dérivée nulle à droite en 0. On a par ailleurs $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Il n'y a donc pas de branche infinie à étudier.

On obtient le tableau de variations suivant.

x	0		$1/e$		1		$e^{1/2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	0	$+$	2	$+$	0	$-$	$-e^{-3/4}$	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$1/e$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$e^{-1/4}$	$\searrow$	0

La courbe représentative de f est la suivante :



Courbe représentative de f

Correction de l'exercice 2.8

On applique le théorème des accroissements finis à la fonction ln qui est continue sur $[x^{\alpha/2}, x^{\alpha}]$ et dérivable sur $]x^{\alpha/2}, x^{\alpha}[$. Il existe donc $c \in]x^{\alpha/2}, x^{\alpha}[$ tel que

$$\frac{\ln(x^{\alpha}) - \ln(x^{\alpha^2})}{x^{\alpha} - x^{\alpha^2}} \ln'(c) = \frac{1}{c},$$

ce qui est la relation demandée. On a donc, comme $\ln(x^{\alpha}) - \ln(x^{\alpha^2}) = \frac{\alpha}{2} \ln x$,

$$\frac{\ln x}{x^{\alpha}} = \frac{2}{\alpha}(1 - x^{-\alpha/2})\frac{1}{c}.$$

Comme $c \geq x^{\alpha/2}$ et $1 - x^{-\alpha/2} \leq 1$, on obtient donc que pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$0 \leq \frac{\ln x}{x^{\alpha}} \leq \frac{2}{\alpha} x^{-\alpha/2}.$$

Comme $\lim_{x \to +\infty} x^{-\alpha/2} = 0$, on déduit donc que $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0$.

Correction de l'exercice 2.9

i) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P'(x) = nx^{n-1} + a$. Donc
si n est pair, P' possède une unique racine r : si $a < 0$, $r = (-a/n)^{1/(n-1)}$, si $a = 0$, $r = 0$, si $a > 0$, $r = -(a/n)^{1/(n-1)}$,
si n est impair et $a > 0$, P' ne possède pas de racine, si $a = 0$, P' possède une unique racine $r = 0$, si $a < 0$, P' possède deux racines $(-a/n)^{1/(n-1)}$ et $-(-a/n)^{1/(n-1)}$.
ii) Le théorème de Rolle permet de montrer qu'entre deux racines d'une fonction dérivable existe toujours au moins une racine de la dérivée. Donc si P' possède au plus m racines, alors P possède au plus $m + 1$

racines, ce qui donne le résultat demandé.

Correction de l'exercice 2.10

La fonction est continue sur $\mathbb{R}^+$ comme composée de fonctions continues et dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ comme composée de fonctions dérivables. Sa dérivée vaut, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \sin \sqrt{x}$.
En 0, on a $f(0) = 1$. Si l'on utilise la formule donnée en cours, on a $1 - \cos u$ équivaut à $\frac{u^2}{2}$ au voisinage de 0. Ceci montre qu'il y a donc une dérivée à droite en 0, valant $-\frac{1}{2}$.
Remarque : on peut aussi retrouver ce résultat par limite de f', au moyen de l'exercice 4 du devoir.

Correction de l'exercice 2.11

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 + e^x > 0$, et de plus $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. La fonction f est donc strictement croissante et de dérivée toujours non nulle. Donc la fonction réciproque g est définie, strictement croissante, continue et dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Comme $f(0) = 1$ on a donc $g(1) = 0$. On applique les formules du cours :

$$g'(1) = \frac{1}{f'(g(1))} = \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{2},$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g''(x) = -\frac{g'(x)f''(g(x))}{(f'(g(x)))^2} = -\frac{f''(g(x))}{(f'(g(x)))^3}.$$

Donc $g''(1) = -\dfrac{e^0}{8} = -\dfrac{1}{8}$.

Correction de l'exercice 2.12

i) on applique le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[0, u_n]$ ou $[u_n, 0]$ selon le signe de u_n.
ii) on a $\lim\limits_n v_n = 0$, donc par hypothèse sur f', $\lim\limits_n f'(v_n) = l$. Donc on obtient $\lim\limits_n \dfrac{f(u_n) - f(0)}{u_n} = l$, ce qui prouve la dérivabilité de f en 0.

Correction de l'exercice 2.13

On trouve, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 2$:

$$f^{(n)}(x) = C_n^0 (e^x)^{(n)} (ax^2 + bx + c) + C_n^1 (e^x)^{(n-1)} (ax^2 + bx + c)' + C_n^2 (e^x)^{(n-2)} (ax^2 + bx + c)'',$$

les autres termes de la formule de Leibniz étant nuls. On trouve donc

$$f^{(n)}(x) = e^x [ax^2 + bx + c + n(2ax + b) + \frac{n(n-1)}{2} 2a],$$

donc

$$f^{(n)}(x) = e^x [ax^2 + (b + 2an)x + c + nb + n(n-1)a].$$

Il faut bien sur calculer f' pour être complet.

Correction de l'exercice 2.14

En étudiant la fonction $f\ :]-1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x - \ln(1+x)$, on montre que pour tout $x \in]0,1]$, $0 < f(x)$ et $f(0) = 0$. On peut alors montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_{n+1} < u_n$. La suite est donc décroissante minorée. Elle converge vers $l \in [0,1]$ qui vérifie $f(l) = 0$, et $l = 0$ est la seule solution possible. La suite converge donc vers 0.

Correction de l'exercice 2.15

i) Cela résulte de $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos x \in [0,1]$ et $[0,1] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$.
ii) On étudie la fonction $f\ : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x - \cos x$, on voit qu'elle est strictement croissante et que $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 - \cos 1 > 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence d'une solution, la stricte monotonie de f donne son unicité.
iii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, par le théorème des accroissements finis, l'existence de $c \in [0,1]$ tel que $u_{n+1} - l = \cos u_n - \cos l = (\sin c)(u_n - l)$. Comme $0 \leq \sin c \leq \sin 1$, on en déduit la propriété demandée. On montre donc par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |u_n - l| \leq (\sin 1)^n |u_0 - l|$. Comme $0 < sin 1 < 1$, on en déduit donc que $\lim_n (\sin 1)^n |u_0 - l| = 0$, et donc $\lim_n u_n = l$.

Correction de l'exercice 2.16

La fonction est bien définie sur $\mathbb{R}$ et elle est paire (car la fonction arctan est impaire). On l'étudie donc sur $[0, +\infty[$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \arctan x + \frac{x}{1+x^2},$$

qui est toujours positive ou nulle, et

$$f''(x) = \frac{2}{(1+x^2)^2},$$

qui est toujours strictement positive. La courbure de la fonction est donc toujours tournée vers le haut. On trouve le tableau de variations suivant :

x	0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Il faut étudier la branche infinie. On a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Il faut donc étudier la limite, quand x tend vers $+\infty$, de $f(x) - x\frac{\pi}{2} = x(\arctan x - \frac{\pi}{2})$. On utilise alors la relation, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan x},$$

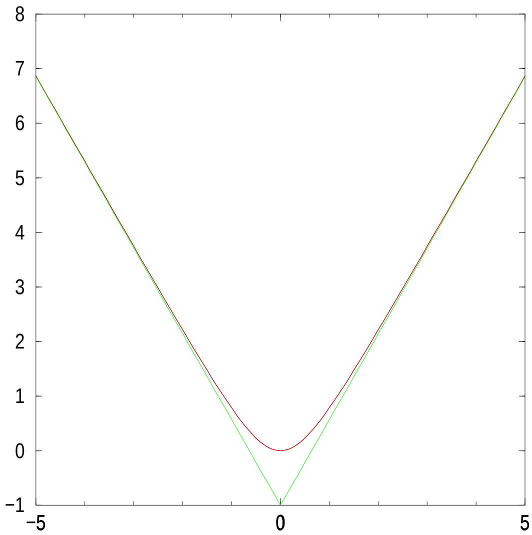
pour écrire, pour tout $y > 0$

$$\arctan y + \arctan\frac{1}{y} = \frac{\pi}{2}.$$

Cette relation montre alors que, pour tout $x > 0$, $\arctan x - \frac{\pi}{2} = -\arctan\frac{1}{x}$ qui est équivalent à $-\frac{1}{x}$ au voisinage de $+\infty$. On obtient donc

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x\frac{\pi}{2}) = -1.$$

Il y a donc une asymptote, d'équation $y = x\frac{\pi}{2} - 1$ au voisinage de $+\infty$.
La courbe représentative de f est alors la suivante :



Courbe représentative de f

Correction de l'exercice 2.17

i) Puisque toute fonction continue atteint ses bornes, il existe $c \in [-a, a]$ et $d \in [-a, a]$ tels que $g(c) = m$ et $g(d) = M$. Puisque $m < g(-a) < M$ et $m < g(a) < M$, alors c et d sont différents et différents de a et de $-a$. En ces points, on a donc $g'(c) = g'(d) = 0$ (voir la démonstration du théorème de Rolle, qui est basée sur l'existence d'un point strictement intérieur à l'intervalle où la fonction atteint son maximum ou son minimum pour affirmer que la dérivée s'annule en ce point car le taux d'accroissement change de signe). En appliquant maintenant le théorème de Rolle lui-même à la fonction g', il existe donc x_0, compris strictement entre c et d, tel que $g''(x_0) = 0$.
ii) Si g est impaire, et que $c \in [-a, a]$, $d \in [-a, a]$ sont tels que $g(c) = m$ et $g(d) = M$, on a alors $g(-c) = -m$ et $g(-d) = -M$. Donc $m \leq -M$ car m est la plus petite valeur atteinte par g et $-m \leq M$ car M est la plus grande valeur atteinte par g. Ceci montre donc que $-m = M$. En écrivant l'expression du taux d'accroissement, on voit que la dérivée d'une fonction paire est impaire, et que la dérivée d'une fonction impaire est paire. La dérivée seconde de g est donc impaire, et vérifie donc $g''(0) = 0$.
iii) Il suffit de prendre $g(x) = -x^2 - x$.

Correction de l'exercice 2.18

La fonction est bien définie sur $\mathbb{R}$. Elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée d'applications continues et dérivables. Elle possède un axe de symétrie, d'équation $x = \frac{\ln 2}{2}$, car pour tout $x \in \mathbb{R}$,

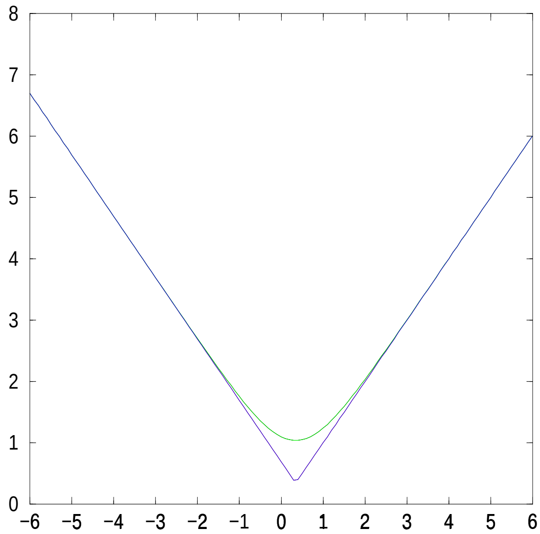
$$f(\ln 2 - x) = \ln(e^{\ln 2 - x} + 2e^{-\ln 2 + x}) = \ln(2e^{-x} + \frac{2}{2}e^{x}) = f(x).$$

Remarque : il serait très difficile de trouver cet axe de symétrie a priori. Son existence est en fait révélée par l'étude elle même. De ce fait, je poursuis la correction de cet exercice sans tenir compte de l'existence de cet axe de symétrie.

La dérivée vaut $f'(x) = \frac{e^{2x}-2}{e^{2x}+2}$, sa dérivée seconde vaut $f''(x) = \frac{8e^{2x}}{(e^{2x}+2)^2}$, donc elle est toujours strictement positive (pas de points d'inflexion). Le tableau de variations de f est donc le suivant :

x	$-\infty$		$\frac{\ln 2}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{2}\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

L'étude des branche infinies donne deux asymptotes, d'équations $y = x$ et $y = \ln 2 - x$ (on retrouve bien sûr deux asymptotes symétriques par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\ln 2}{2}$).
La courbe représentative de f est alors la suivante :



Courbe représentative de f

Correction de l'exercice 2.19

i) On a, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\psi'(x) = \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$ et $\psi''(x) = \dfrac{x^2 f''(x) - 2xf'(x) + 2f(x)}{x^3}$. On étudie le signe de $xf'(x) - f(x)$. Cette fonction possède la dérivée $xf''(x)$ strictement positive pour $x > 0$, et vaut 0 en 0. Elle est donc strictement positive sur $]0, +\infty[$, ce qui montre que $\psi'(x)$ est strictement positive. Donc ψ est strictement croissante. Par ailleurs, comme $f(0) = 0$, on a bien $\lim_{x \to 0} \psi(x) = f'(0)$, ce qui montre que la fonction ψ est continue en 0.
ii)a) Il suffit d'appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction f entre 0 et x, puisque $f(0) = 0$.
ii)b) On a $f'(c) = \psi(x)$. Or f' est strictement croissante, donc injective. La valeur c est donc unique.

iii)a) La fonction g est, sur $]0,+\infty[$, la composée de la fonction réciproque de f' et de ψ. Elle est donc sur cet intervalle strictement croissante, continue et dérivable. Montrons la continuité de g en 0. On a $0 < c < x$ d'après ii)a), donc $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, ce qui montre que $f'(g(0)) = \psi(0)$.
iii)b) La fonction g est donc dérivable, comme composée de fonctions dérivables, et pour tout $x \in]0,+\infty$, $g'(x) = \psi'(x)\frac{1}{f''(g(x))}$.
iii)c) On applique la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 à la fonction f au voisinage de 0. On trouve $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}(f''(0) + h_1(x)) = xf'(0) + \frac{x^2}{2}(f''(0) + h_1(x))$, et on écrit la dérivabilité de f' en 0, ce qui donne $f'(x) = f'(0) + x(f''(0) + h_2(x))$. On obtient donc $\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} = \frac{1}{2}f''(0) + h_2(x) - \frac{1}{2}h_1(x)$, ce qui prouve $\lim_{x\to 0} \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{1}{2}f''(0)$. On a donc, comme $\psi(0) = f'(0)$, $(f')^{(-1)}(\psi(0)) = 0$, donc, par dérivabilité de $(f')^{(-1)}$ en $f'(0)$

$$(f')^{(-1)}(\psi(x)) - (f')^{(-1)}(\psi(0)) = (\psi(x) - \psi(0))(\frac{1}{f''(0)} + h_3(\psi(x) - \psi(0))),$$

donc

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x}(\frac{1}{f''(0)} + h_3(\psi(x) - \psi(0))).$$

On a par ailleurs montré que

$$\lim_{x\to 0} \psi'(0) = \frac{1}{2}f''(0),$$

ce qui montre que ψ est dérivable en 0, avec

$$\lim_{x\to 0} \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x} = \frac{1}{2}f''(0).$$

Donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x} \frac{1}{f''(0)} = \frac{1}{2}.$$

Cela prouve donc que g est dérivable droite en 0, avec $g'(0) = \frac{1}{2}$.