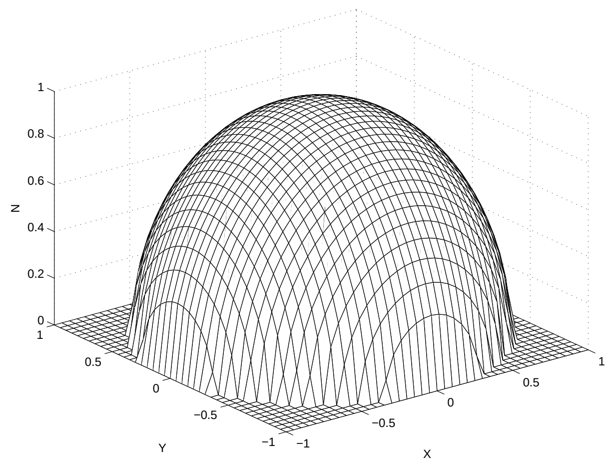
Université de Montpellier II

ULMA102, Biomaths1
1er semestre 2004-2005

Feuille 5

1 Représentations graphiques

Exercice 1 On considère une fonction $f(x, y)$ de deux variables x et y. Nous avons tracé, dans la figure ci-dessous, la surface-graphe de f: au dessus de chaque point (x, y) du plan horizontal, nous avons mis un point à hauteur $z = f(x, y)$.



Soit $c \in [0, 1]$. Essayer de représenter, sur un plan, l'ensemble des points (x, y) tels que $f(x, y) = c$. Représenter, sur un même dessin, cet ensemble pour diverses valeurs de c.
Si l'on vous donne les dessins de ces ensembles pour diverses valeurs de c, sauriez-vous reconstruire la surface qui représente f?

Exercice 2 On rappelle la loi des gaz parfaits: pour une mole de gaz, on a $PV = RT$, où P est la pression, V le volume et T la température en Kelvin (R est la constante des gaz parfaits).

i) On suppose que, lors d'une expérience ("isotherme"), T est constante, disons égale à T_0. Tracer P en fonction de V, et ce pour diverses valeurs de T_0.

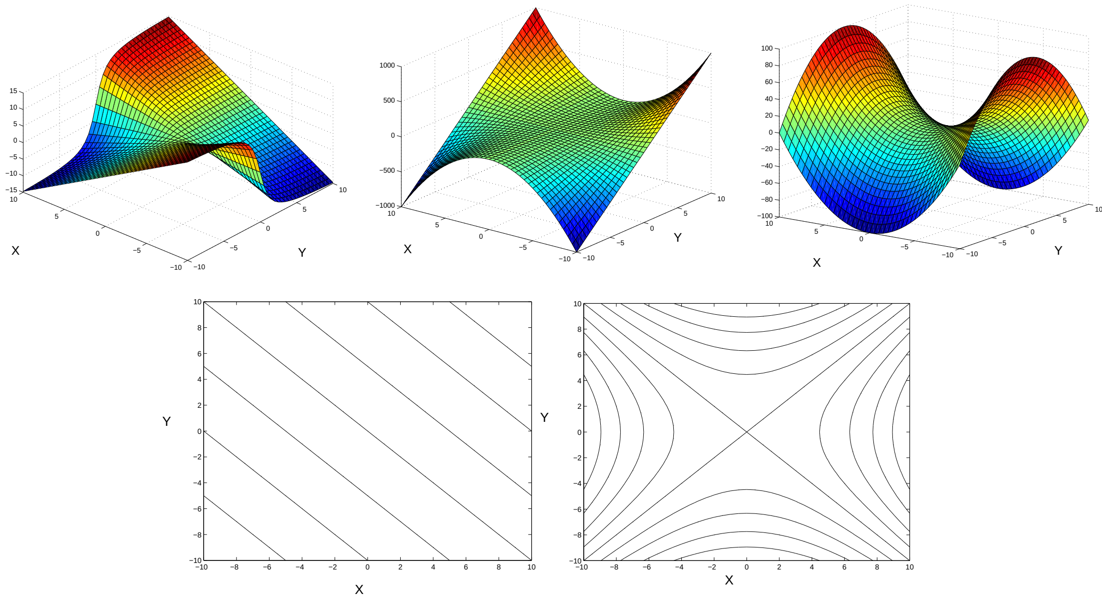
ii) T est une fonction des deux variables (P, V). Tracer la surface correspondant à cette fonction (on aura peut-être intérêt à prendre un axe des V qui part vers l'arrière...).

Exercice 3 Soit la fonction $f(x, y) = x + y$.

i) On fixe $y = y_0$. Tracer, dans un repère tri-dimensionnel et pour diverses valeurs de y_0, les points $(x, y_0, f(x, y_0))$ lorsque x décrit $[0, \infty[$.

ii) En déduire la surface représentant f.

Exercice 4 Relier les fonction et les courbes de niveaux ou surfaces suivantes: $f(x,y) = x^2 - y^2$, $g(x,y) = x\arctan(y)$, $h(x,y) = x + y$, $i(x,y) = x^2y$,



Exercice 5 Tracer les courbes de niveau et les surfaces de

i) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

ii) $f(x,y) = x^2$.

iii) $f(x,y) = x\sin(y)$.

iv) $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)$.

2 Fonctions partielles, dérivées partielles

Exercice 6 On considère une fonction de deux variables $f(x,y)$. On fixe $y = y_0$; la fonction $g(x) = f(x,y_0)$ est une fonction d'une variable; où apparait le graphe de g sur la surface-graphe de f? Que représente, sur cette surface, $g'(x)$?

Exercice 7 Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes: $f_1(x,y) = x + xy^2$, $f_2(x,y) = \arctan(x\cos(xy))$, $f_3(x,y) = x^y + xy + 1$.

Exercice 8 Lorsque l'on considère un ensemble de particules à l'équilibre à une température T, la loi de Boltzmann dit que la proportion de particules ayant une énergie comprise entre E et $E + \Delta E$ (pour ΔE petit) est de l'ordre de $P(T,E)\Delta E$, où $P(T,E) = Ce^{-E/kT}$, k étant la constante de Boltzmann ($k = 1.38 \times 10^{-23}$ JK^{-1}) et C une constante (dépendant du système étudié). Calculer les dérivées partielles de P. Un commentaire?

Exercice 9 On cherche ici à évaluer l'effet d'incertitudes de mesure.

i) Soit $A(l)$ l'aire d'un carré de coté l. On suppose que l'on a pu mesurer l avec une erreur: $l = 2 \pm 0.01$ mètres. Donner une estimation de l'aire sous la forme $A(l) = 4 \pm \epsilon$ m^2 (où ϵ est petit); calculer $A'(2) \times 0.01$ et commenter.

ii) Expliquer pourquoi, si $f(x)$ est une fonction de x et si l'on commet une petite erreur δx sur x, alors on peut considérer que l'erreur δf commise sur f est, au plus, de l'ordre de $|f'(x)|\delta x$ *(on sera conscient qu'il s'agit là d'une approximation... et on pourra chercher des exemples dans lesquels cette approximation est en fait assez mauvaise).*

iii) Soit $f(x,y)$ une fonction de deux variables x et y. On suppose que l'on a commis des erreurs δx et δy sur x et y. Pourquoi peut-on dire que l'erreur δf commise sur f est, au pire, de l'ordre de $|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)|\,\delta x + |\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)|\,\delta y$?

iv) Application: la période d'un pendule oscillant de longueur l est $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, où g est la gravité. On donne $g = 9.8 \pm 0.02$ ms^{-2} et $l = 1 \pm 0.01$ m. Estimer l'erreur commise sur T.

Exercice 10 On considère (équation de Van der Waals un peu simplifiée) un gaz obéissant à la loi: $(P + \frac{1}{V^2})V = RT$ (P pression, V volume, T température); P est donc une fonction de V et T. Calculer $\frac{\partial P}{\partial V}$ et $\frac{\partial P}{\partial T}$.
L'entropie du gaz s'écrit $S = C\ln(T) + R\ln(V)$ (C constante). A entropie constante, on augmente le volume du gaz; est-ce que sa pression va augmenter ou diminuer?

Exercice 11 Calculer la dérivée de $g(s) = f(u(s), v(s))$ dans les cas suivants:

i) $f(x,y) = xye^x$, $u(s) = 2s$, $v(s) = \tan(s)$,

ii) $f(x,y) = \ln(x) + y$, $u(s) = -s^2$, $v(s) = s$,

iii) $f(x,y) = xy/(x+y)$, $u(s) = s^2 + 2$, $v(s) = \sin(s)$.

Exercice 12 Soit $f(x,y)$ une fonction de deux variables. On suppose que, pour tout (x,y), $f(x,y) \geq f(0,0)$. Que peut-on dire de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et de $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$?

Exercice 13 Chercher les minima et maxima des fonctions suivantes: $f_1(x,y) = x^2 + y^2$, $f_2(x,y) = x^2 - y^2$, $f_3(x,y) = x + y^2$.

Exercice 14 On représente une épidémie par une fonction E: $E(t,x)$ est la quantité de personnes malades situées (sur un axe) au point x à l'instant t. Cette fonction est de la forme $E(t,x) = f(t-x) + g(t+x)$ ([1]), avec f et g des fonctions d'une variable. Montrer que, en un temps t et un lieu x où E est maximum, on a $f'(t-x) = g'(t+x) = 0$.
Application: on prend $f(s) = e^{-s^2}$ et $g(s) = s^2e^{-s^2}$. On admettra qu'il existe des maxima (globaux) de E. Les trouver.

3 Extraits de sujets d'examen

Exercice 15 *(Durée conseillée: 30 minutes).*

i) Parmi les trois graphes de la figure 1, lequel est celui de $f(x,y) = x^2 + y$ (on vous demande de justifier votre choix)?

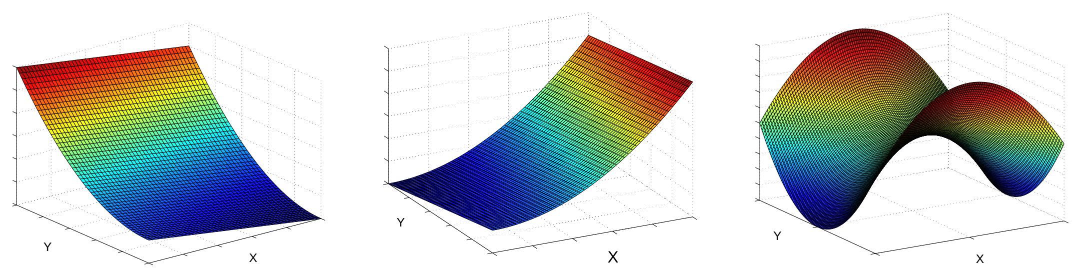


Figure 1: graphes A, B, C

[1] Ceci représente en fait deux populations contaminées qui migrent, l'une venant des x négatifs et allant vers les x positifs, l'autre faisant le chemin inverse.

ii) Soit $u(t) = t^2 + t$, $v(t) = e^{t^2}$ et $f(x, y) = x^2 + \cos(y)$. Calculer les dérivées partielles de f, puis la dérivée de $w(t) = f(u(t), v(t))$.

Exercice 16 *(Durée conseillée: 30 minutes).*

i) Parmi les trois graphes de la figure 2, lequel est celui de $f(x, y) = x^2 - y^2$ (**on vous demande de justifier votre choix**)?

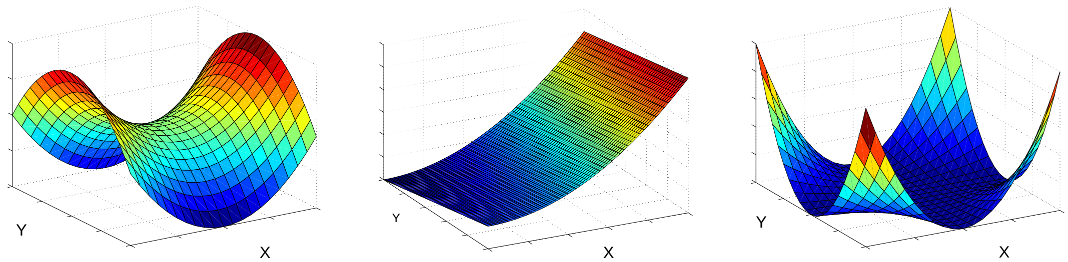


Figure 2: graphes A, B, C

ii) Soit $u(t) = 2t^3$, $v(t) = \cos(e^{t^2})$ et $f(x, y) = xy^2 + y$. Calculer les dérivées partielles de f, puis la dérivée de $w(t) = f(u(t), v(t))$.