Chapitre 5 : Fonctions réelles : limites

(2 cours)

1 Contenu du cours

1.1 Exemples et idée intuitive

limite aux bornes d'un intervalle ouvert
exemples de fonctions discontinues : $E(x)$

1.2 Définition

Définition 4 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$ ou x_0 une extrémité de I. On dit que $f(x)$ admet la limite $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0 ssi pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_\star^+$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_\star^+$, tel que pour tout $x \in I$, si $|x - x_0| \leq \alpha$ alors $|f(x) - l| \leq \varepsilon$.*

définition avec quantificateurs.
définition avec l'aide des suites
définition des limites infinies en un point
définition des limites finies à l'infini
définition des limites infinies à l'infini.
limite à droite, continuité à droite (et à gauche)

Définition 5 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$ ou x_0 une extrémité de I. On dit que $f(x)$ admet la limite à droite $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0 ssi*
pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_\star^+$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_\star^+$, tel que pour tout $x \in I$, si $0 < x - x_0 \leq \alpha$ alors $|f(x) - l| \leq \varepsilon$.

limite à gauche

1.3 Propriétés

sommes
produits
inverses
quotients
composition de fonctions
inégalités

1.4 Equivalents

Définition. Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On dit que f et g sont équivalentes en a ssi il existe $b \in \mathbb{R}_\star^+$ et $h : I \cap [a - b, a + b] \longrightarrow \mathbb{R}$, tel que $\lim_{x \to a} h(x) = 0$ et pour tout $x \in I \cap [a - b, a + b], f(x) = g(x)(1 + h(x))$.
Montrer que l'équivalence est réflexive, symétrique, transitive.
Exemples
Opérations : produits, inverses, puissances
Fonction négligeable devant une fonction
attention : pas de somme d'équivalents
Liste d'équivalents à connaître

1.5 Fonctions monotones

Définition, fct strictement monotone
Limites en des points intérieurs, limites aux bornes
Injectivité d'une fonction strictement monotone: fonction réciproque

2 Exercices

2.1 Equivalence et non linéarité

Donner un exemple de deux fonctions f et g de I dans $\mathbb{R}_\star^+$, $a \in \mathbb{R}$ telles que f et g sont équivalentes en a et $\ln f$ et $\ln g$ non équivalentes en a.

2.2 Limites à droite et à gauche

Etudier la limite en 0 des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}_*$; préciser lorsqu'il y a une limite à droite et une limite à gauche distinctes, et préciser si l'on peut effectuer ou non un prolongement des fonctions par continuité en 0.
i) $f_1(x) = \dfrac{\sin 5x}{x}$
ii) $f_2(x) = \dfrac{\tan x^2}{\sin(2x^2)}$
iii) $f_3(x) = \dfrac{1 - \cos 6x}{x^2}$
iv) $f_4(x) = \dfrac{x}{|x|}$
v) $f_5(x) = \dfrac{1}{x} \sin \sqrt{x^2}$
vi) $f_6(x) = \dfrac{1}{x} \sin x^2$
vii) $f_7(x) = \dfrac{e^{2x} - e^x}{x}$
viii) $f_8(x) = \exp(\dfrac{1}{x})$

2.3 Limites et continuité

Etudier la continuité et représenter graphiquement la fonction $f \ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto E(x) + \sqrt{x - E(x)}$.

2.4 Parties entières et limites

Etudier les limites suivantes
i) limite quand x tend vers $+\infty$ de $E(x)$
ii) limite quand x tend vers $+\infty$ de $\frac{E(x)}{x}$
iii) limite quand x tend vers $+\infty$ de $E(\frac{1}{x})$
iv) limite quand x tend vers $+\infty$ de $E(\frac{\sin x}{x})$

2.5 Suites et limites

On considère la fonction $f \ : \mathbb{R}+_* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$. Donner trois suites positives qui convergent vers 0 et dont l'image par f tend respectivement vers 0, $+\infty$, $-\infty$.

2.6 Limites et fonctions trigonométriques

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f\ :]0,\pi[\cup]\pi,2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x-a}{\sin x}$. Etudier, selon la valeur du paramètre a, la limite de f en π.

2.7 Limites de diverses fonctions

Etudier les limites des fonctions suivantes, définies de $\mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, quand x tend vers $+\infty$.
i) $f_1(x) = x \tan \dfrac{1}{x}$
ii) $f_2(x) = x^2(1 - cos\dfrac{1}{x})$
iii) $f_3(x) = x^2 \ln(1 + \dfrac{1}{2x^2})$
iv) $f_4(x) = \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$
v) $f_5(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - ax$, en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$

2.8 Suites récurrentes

Soit $f\ : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction continue.
i) Montrer que f possède un point fixe, c'est à dire qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.
ii) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par sa valeur initiale $u_0 \in [0,1]$ et par la relation de récurrence, $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si la suite converge vers l, alors $l \in [0,1]$ et $f(l) = l$.
iii) Donner un exemple de fonction continues $f\ : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ et de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par sa valeur initiale $u_0 \in [0,1]$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, telle que la suite ne soit pas convergente.

2.9 Fonctions périodiques admettant une limite

Soit $f\ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique sur $\mathbb{R}$, c'est à dire qu'il existe un réel $T > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x).$$

On suppose de plus qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.
i) Montrer que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x) - l| \leq \varepsilon$
ii) En déduire que la fonction f est la fonction constante égale à l.

2.10 Continuité et équivalents

i) Montrer que l'on peut prolonger par continuité en 0 la fonction $f\ : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto (1+\sin x)^{1/x}$. Donner l'expression de sa dérivée lorsque cette fonction est dérivable. Admet-elle une dérivée à droite en 0 ?
ii) Donner un équivalent au voisinage de $+\infty$ de la fonction $g\ : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x^4+x} - \sqrt{x^4+1}$ sous la forme Ax^α, pour deux réels A et α que l'on précisera.

3 Correction d'exercices

Correction de l'exercice 2.2

On applique les relations d'équivalence données par le cours. Il existe des réels strictement positifs α_i, $i = 1, \cdots, 4$ et des fonctions tendant vers 0 en 0 $h_i\ : [-\alpha_i, +\alpha_i] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall z \in [-\alpha_1, +\alpha_1],\quad \sin z = z(1 + h_1(z)),$$

$$\forall z \in [-\alpha_2, +\alpha_2], \quad \tan z = z(1 + h_2(z)),$$

$$\forall z \in [-\alpha_3, +\alpha_3], \quad 1 - \cos z = \frac{z^2}{2}(1 + h_3(z)),$$

$$\forall z \in [-\alpha_4, +\alpha_4], \quad e^z - 1 = z(1 + h_4(z)).$$

i) Soit $x \in [-\frac{\alpha_1}{5}, 0[\cup]0, +\frac{\alpha_1}{5}]$. On a

$$f_1(x) = \frac{\sin 5x}{x} = \frac{5x(1 + h_1(5x))}{x} = 5(1 + h_1(5x)).$$

Donc, par sommes et produits et inverses de limites de fonctions, $\lim_{x\to 0, x>0} f_1(x) = \lim_{x\to 0, x<0} f_1(x) = 5$. On peut donc prolonger f_1 par continuité en 0 en posant $f_1(0) = 5$.
ii) Soit $x \in \mathbb{R}_*$ tel que $|x| \leq \sqrt{\frac{\alpha_1}{2}}$ et $|x| \leq \sqrt{\alpha_2}$. Alors

$$f_2(x) = \frac{\tan x^2}{\sin(2x^2)} = \frac{x^2(1 + h_2(x^2))}{2x^2(1 + h_1(2x^2))} = \frac{1 + h_2(x^2)}{2 + 2h_1(2x^2)}.$$

Donc , par sommes et produits et inverses de limites de fonctions, $\lim_{x\to 0, x>0} f_2(x) = \lim_{x\to 0, x<0} f_2(x) = \frac{1}{2}$. On peut donc prolonger f_2 par continuité en 0 en posant $f_1(0) = \frac{1}{2}$.
iii) Soit $x \in [-\frac{\alpha_3}{6}, 0[\cup]0, +\frac{\alpha_3}{6}]$. On a

$$f_3(x) = \frac{1 - \cos 6x}{x^2} = \frac{\frac{(6x)^2}{2}(1 + h_3(6x))}{x^2} = 18(1 + h_3(6x)).$$

Donc, par sommes et produits et inverses de limites de fonctions, $\lim_{x\to 0, x>0} f_3(x) = \lim_{x\to 0, x<0} f_3(x) = 18$. On peut donc prolonger f_3 par continuité en 0 en posant $f_1(0) = 18$.
iv) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $f_4(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{x} = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_*^-$, $f_4(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{-x} = -1$. Donc $\lim_{x\to 0, x>0} f_4(x) = 1$ et $\lim_{x\to 0, x<0} f_4(x) = -1$. On ne peut donc pas prolonger f_4 par continuité.
v) On a pour tout $x \in \mathbb{R}_*$, $f_5(x) = \frac{1}{x}\sin\sqrt{x^2} = \frac{1}{x}\sin|x|$. On trouve donc aisément que $\lim_{x\to 0, x>0} f_5(x) = 1$ et $\lim_{x\to 0, x<0} f_5(x) = -1$. On ne peut donc pas prolonger f_5 par continuité.
vi) Soit $x \in \mathbb{R}_*$ tel que $|x| \leq \sqrt{\alpha_1}$. Alors

$$f_6(x) = \frac{1}{x}\sin x^2 = \frac{x^2(1 + h_1(x^2))}{x} = x(1 + h_1(x^2)).$$

Donc, par sommes et produits et inverses de limites de fonctions, $\lim_{x\to 0, x>0} f_6(x) = \lim_{x\to 0, x<0} f_6(x) = 0$. On peut donc prolonger f_6 par continuité en 0 en posant $f_6(0) = 0$.
vii) Soit $x \in [-\frac{\alpha_4}{2}, 0[\cup]0, +\frac{\alpha_4}{2}]$.Alors

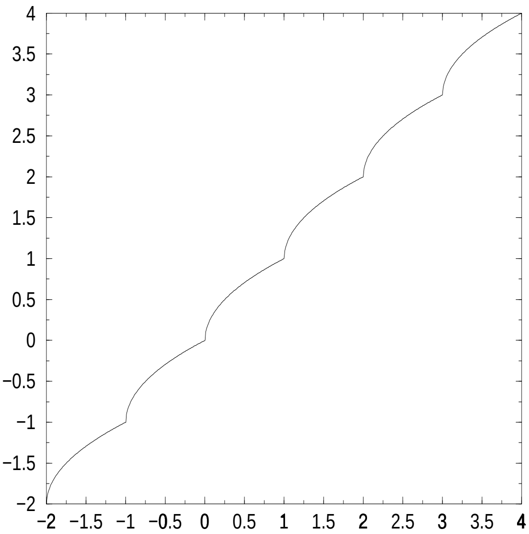
$$f_7(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{x} = \frac{1 + 2x(1 + h_4(2x)) - 1 - x(1 + h_4(x))}{x} = 1 + 2h_4(2x) - h_4(x).$$

Donc, par sommes de limites de fonctions, $\lim_{x\to 0, x>0} f_7(x) = \lim_{x\to 0, x<0} f_7(x) = 1$. On peut donc prolonger f_7 par continuité en 0 en posant $f_7(0) = 1$.
viii) On a $\lim_{x\to 0, x>0} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to 0, x<0} \frac{1}{x} = -\infty$ donc $\lim_{x\to 0, x>0} f_8(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 0, x<0} f_8(x) = 0$.

On ne peut donc pas prolonger f_8 par continuité.

Correction de l'exercice 2.3

Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in]n, n+1[$. On a alors $f(x) = n + \sqrt{x-n}$. La fonction f est alors continue par composition et somme de fonctions continues. On a par ailleurs $\lim_{x \to 0, x>0} \sqrt{x} = 0$ donc $\lim_{x \to n, x>n} fx = n$. Pour tout $x \in]n-1, n[$, on a $f(x) = n - 1 + \sqrt{x-n+1}$, donc $\lim_{x \to n, x<n} fx = n - 1 + \sqrt{1} = n$. Comme $f(n) = n$, on en déduit donc que f est continue en tout point $n \in \mathbb{Z}$. La fonction f est donc continue en tout point réel.



Courbe représentative de f

Correction de l'exercice 2.4

i) On, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $E(x) \leq x < E(x) + 1$, donc $x - 1 < E(x) \leq x$. Il suffit de remarquer que si f et g sont deux fonctions définies de I dans $\mathbb{R}$, avec I intervalle non majoré de $\mathbb{R}$, et si $\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
En effet, soit $A \in \mathbb{R}_*^+$. Puisque $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, il existe $B \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $\forall x \in I, x \geq B \Rightarrow f(x) \geq A$. Soit $x \in I$ tel que $x \geq B$. Alors $f(x) \geq A$ et $g(x) \geq f(x)$ donc $g(x) \geq A$. Cela montre donc que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
En appliquant le résultat précédent aux fonctions $f(x) = x - 1$ et $g(x) = E(x)$, on obtient donc $\lim_{x \to +\infty} E(x) = +\infty$.
ii) Comme on l'a remarqué à la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $x - 1 < E(x) \leq x$ donc $1 - \frac{1}{x} < \frac{E(x)}{x} \leq 1$. Puisque $\lim_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{x} = 1$, le cours nous permet de montrer que $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{E(x)}{x} = 1$.
iii) On remarque que, pour tout $x \in]1, +\infty[$, $0 < \frac{1}{x} < 1$ donc $E(\frac{1}{x}) = 0$. La fonction étant constante au delà de 1, sa limite est donc cette constante, donc $\lim_{x \to +\infty} E(\dfrac{1}{x}) = 0$.
iv) On remarque que, pour tout $k \in \mathbb{N}_*$ et tout $x \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$, $0 \leq \frac{\sin x}{x} < 1$, donc $E(\frac{\sin x}{x}) = 0$, et pour tout $x \in](2k+1)\pi, 2(k+1)\pi[$, $-1 \leq \frac{\sin x}{x} < 0$ donc $E(\frac{\sin x}{x}) = -1$. La fonction n'admet donc pas

de limite en $+\infty$.

Correction de l'exercice 2.5

Il suffit de choisir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{(n+1)\pi}$, $v_n = \dfrac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi}$, $w_n = \dfrac{1}{(2n+\frac{3}{2})\pi}$.

Correction de l'exercice 2.6

On a, pour tout y assez petit, $\sin y = y(1+h(y))$, avec $\lim\limits_{y\to 0} h(y) = 0$. En posant $x = y+\pi$, et compte tenu de $\sin(y+\pi) = -\sin y$, on obtient $f(x) = -\frac{y+\pi-a}{y(1+h(y))}$
Cas $a = \pi$. Alors $f(x) = -\frac{1}{1+h(x-\pi)}$ et donc $\lim\limits_{x\to\pi} f(x) = -1$.
Cas $a \neq \pi$. Alors, en posant $g(x) = -\frac{x-a}{1+h(x-\pi)}$ et $h(x) = \frac{1}{x-\pi}$, on obtient $\lim\limits_{x\to\pi} g(x) = a-\pi$ et $\lim\limits_{x\to\pi, x>\pi} h(x) = +\infty$ ainsi que $\lim\limits_{x\to\pi, x<\pi} h(x) = -\infty$. Donc si $a > \pi$, $\lim\limits_{x\to\pi, x>\pi} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to\pi, x<\pi} f(x) = -\infty$. Si $a < \pi$, $\lim\limits_{x\to\pi, x>\pi} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to\pi, x<\pi} f(x) = +\infty$.

Correction de l'exercice 2.7

i) par équivalent de $\tan(y)$ en 0, on trouve que la limite demandée vaut 1.
ii) par équivalent de $1-\cos(y)$ en 0, on trouve que la limite demandée vaut $\frac{1}{2}$.
iii) par équivalent de $\ln(1+y)$ en 0, on trouve que la limite demandée vaut $\frac{1}{2}$.
iv) En écrivant

$$\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1},$$

on trouve que la limite demandée vaut $\frac{1}{2}$.
v) Si $a \leq 0$, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f_5(x) = +\infty$ (pas d'indétermination).
Si $a > 0$, on écrit

$$\sqrt{x^2+x+1} - ax = \frac{(1-a^2)x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+ax} = \frac{(1-a^2)x+1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+a}.$$

Donc si $a \in]0,1[$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_5(x) = +\infty$. Si $a = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_5(x) = \dfrac{1}{2}$. Si $a \in]1,+\infty[$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_5(x) = -\infty$.

Correction de l'exercice 2.8

i) On pose $g\ : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)-x$. La fonction g est continue sur $[0,1]$ comme somme de fonctions continues. On a $g(0) = f(0) \in [0,1]$ donc $g(0) \geq 0$. Comme $f(1) \in [0,1]$, alors $g(1) = f(1)-1 \leq 0$. Donc la valeur 0 vérifie $g(1) \leq 0 \leq g(0)$. Le théorème des valeurs intermédiaires, appliqué pour la fonction g sur l'intervalle $[0,1]$ pour la valeur 0, permet d'affirmer l'existence de $x_0 \in [0,1]$ tel que $g(x_0) = 0$, c'est à dire $f(x_0) = x_0$.
ii) On a $u_0 \in [0,1]$. Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \in [0,1]$. Puisque $u_{n+1} = f(u_n)$, par définition de l'ensemble d'arrivée de f, $u_{n+1} \in [0,1]$. La définition de la suite est donc admissible. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$, alors le cours permet d'affirmer $0 \leq l \leq 1$. La fonction f étant continue en l, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers l, on a donc $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(l)$. La limite de $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ étant également l, on a donc, par passage à la limite de $u_{n+1} = f(u_n)$, $l = f(l)$.

iii) Il suffit de prendre $f(x) = 1 - x$ et $u_0 \neq \frac{1}{2}$. La suite oscille alors entre les valeurs u_0 et $1 - u_0$.

Correction de l'exercice 2.9

i) Nous appliquons l'hypothèse $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$. Il existe $A \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $a \in [A, +\infty[$, $|f(x) - l| \leq \varepsilon$.Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(x + nT) = f(x)$ (la propriété se montre facilement par récurrence). Par propriété d'Archimède, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq \frac{A-x}{T}$, donc $x + nT \geq A$. On a alors $|f(x + nT) - l| \leq \varepsilon$, donc $|f(x) - l| \leq \varepsilon$, ce qui prouve la propriété demandée.
ii) On a vu à plusieurs reprises dans le cours qu'un élément $a \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+, a \leq \varepsilon,$$

alors $a = 0$ (il suffit, dans une démonstration par l'absurde, de prendre $\varepsilon = a/2$). Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = l$.

Correction de l'exercice 2.10

i) La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}_*^+$ car $1 + \sin x \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Elle s'écrit aussi, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+ \setminus \{2k\pi + 3\pi/2, k \in \mathbb{N}\}$ $f(x) = \exp(\frac{1}{x}\ln(1 + \sin x))$, et est donc continue sur $\mathbb{R}_*^+ \setminus \{2k\pi + 3\pi/2, k \in \mathbb{N}\}$ par composition de fonctions continues. Comme, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(2k\pi + 3\pi/2) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 2k\pi+3\pi/2} f(x) = 0$, elle est donc continue sur $\mathbb{R}_*^+$.
Comme il existe une fonction $h_1(y)$ qui tend vers 0 quand y tend vers 0 telle que $\ln(1 + y) = y(1 + h(y))$, on a $f(x) = \exp(\frac{\sin x}{x}(1 + h(\sin x)))$, donc, par équivalence de $\sin x$ avec x au voisinage de 0, on déduit $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = e$. La fonction f est donc prolongeable par continuité en 0.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+ \setminus \{2k\pi + 3\pi/2, k \in \mathbb{N}\}$, f est dérivable et $f'(x) = (-\frac{\ln(1+\sin x)}{x^2} + \frac{\cos x}{x(1+\sin x)})\exp(\frac{1}{x}\ln(1+\sin x))$. Etudions la dérivabilité en 0. On utilise les équivalents suivants au voisinage de 0 : $\sin x - x \tilde{-} -x^3/6$ et $\ln(1 + x) - x \tilde{-} - x^2/2$. Cela permet de trouver que $\lim\limits_{x\to 0}(f(x) - e)/x = -e/2$. La fonction est donc dérivable à droite en 0.
Pour $x_0 = 2k\pi + 3\pi/2$, avec $k \in \mathbb{N}$, on trouve que $1/x_0 < 1/2$, et $(1 + \sin x)\tilde{-}(x - x_0)^2/2$ au voisinage de x_0. Comme $2/x_0 < 1$, la fonction n'est pas dérivable en x_0.
ii) On multiplie par le binome conjugué, et on trouve qu'un équivalent est $\frac{1}{2x}$.