SVM 201
FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Alain Yves LE ROUX

Remarque préliminaire : *Nous nous limiterons dans cette étude au cas de deux variables réelles, la généralisation à plusieurs variables réelles étant immédiate à partir des résultats exposés ici.*

1 La continuité

Soit K une partie de $\mathbb{R}^2$, et f une fonction définie sur K et à valeurs dans $\mathbb{R}$. En pratique, K correspond au domaine de définition de la fonction f. Soit $(x_0, y_0) \in K$.

Définition 1.1 *La fonction f est continue en (x_0, y_0) lorsque*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \text{ si } (x,y) \in K \text{ et } \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)} \leq \eta \text{ alors } |f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leq \epsilon \ . \quad (1.1)$$

Si f est continue en tout point de K, on dit que f est continue sur K.

Exemples : La fonction f définie sur $K = \mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) \ = \ \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \ , \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

est continue sur K.

La fonction f définie sur $K = \mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) \ = \ \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \ , \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

n'est pas continue sur K. En effet, en passant en coordonnées polaires, on obtient, pour $(x,y) \neq (0,0)$, $f(x,y) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos(2\theta)$ qui ne tend pas vers zéro lorsque $r = \sqrt{x^2+y^2}$ tend vers zéro. On trouve par exemple la valeur 1 pour $\theta = 0$.

La fonction f définie sur $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \neq (0,0)\}$ par

$$f(x,y) \ = \ \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

est continue sur K. En effet, le point $(0,0) \notin K$.

2 La dérivabilité

Soit $(x_0, y_0) \in K$, domaine de définition de la fonction f. On fixe y_0, et on considère la fonction $x \longrightarrow f(x, y_0)$, en tant que fonction d'une seule variable, à savoir x. On peut définir, lorsque cette limite existe, la quantité

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \;=\; \lim_{h \longrightarrow 0,\ (x_0+h, y_0) \in K} \left(\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \right) \tag{2.1}$$

qu'on appellera dérivée partielle de f par rapport à sa première variable (à savoir x), au point (x_0, y_0).

En fixant x_0, on peut aussi considérer la fonction d'une seule variable $y \longrightarrow f(x_0, y)$ et définir quand la limite existe

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \;=\; \lim_{k \longrightarrow 0,\ (x_0, y_0+k) \in K} \left(\frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} \right) \tag{2.2}$$

qu'on appellera dérivée partielle de f par rapport à sa seconde variable (à savoir y), au point (x_0, y_0).

Définition 2.1 *Lorsque les dérivées partielles* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *sont définies et continues sur* K*, on dit que la fonction* f *est continuement dérivable sur* K*. Dans ce cas, on peut écrire, en tout point* $(x_0, y_0) \in K$ *tel qu'il existe* $\eta > 0$ *pour lequel* $\{(x_0 + h, y_0 + k) | \sqrt{h^2 + k^2} \leq \eta\} \;\subset\; K$,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) \;+\; h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \;+\; k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \;+\; \sqrt{h^2 + k^2}\, \epsilon(h, k)\ , \tag{2.3}$$

où $\epsilon(h, k)$ *tend vers zéro lorsque* $\sqrt{h^2 + k^2}$ *tend vers zéro.*

2.1 La dérivation de fonctions composées

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$, et w une application de A dans K. Ceci signifie que w est la donnée de deux fonctions u et v, définies sur A, telle que pour $(t, s) \in A$, on ait $(u(t, s), v(t, s)) \in K$. On peut donc définir la fonction $g = f \circ w$ sur A par

$$g(t, s) \;=\; f(u(t, s), v(t, s)).$$

On évalue les dérivées partielles de g. On a pour $(t + \Delta t, s) \in A$

$$\begin{gathered} g(t + \Delta t, s) = f(u(t + \Delta t, s), v(t + \Delta t, s) = \\ = f(u(t, s) + \Delta t \tfrac{\partial u}{\partial t}(t, s) + \Delta t \epsilon_1(\Delta t, 0), v(t, s) + \Delta t \tfrac{\partial v}{\partial t}(t, s) + \Delta t \epsilon_2(\Delta t, 0)) \\ = f(u(t, s), v(t, s)) + \Delta t \tfrac{\partial u}{\partial t}(t, s) \tfrac{\partial f}{\partial x}(u, v) + \Delta t \tfrac{\partial v}{\partial t}(t, s) \tfrac{\partial f}{\partial y}(u, v) + \Delta t \epsilon(\Delta t) \end{gathered}$$

où $\epsilon_1(\Delta t, 0)$, $\epsilon_2(\Delta t, 0)$ et $\epsilon(\Delta t)$ tendent vers zéro lorsque Δt tend vers zéro. On en déduit

$$\lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{g(t + \Delta t, s) - g(t, s)}{\Delta t} \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}(u, v) \frac{\partial u}{\partial t}(t, s) \;+\; \frac{\partial f}{\partial y}(u, v) \frac{\partial v}{\partial t}(t, s)\ .$$

d'où la formule
$$\frac{\partial g}{\partial t}(t,s) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}(u,v)\frac{\partial u}{\partial t}(t,s) \;+\; \frac{\partial f}{\partial y}(u,v)\frac{\partial v}{\partial t}(t,s)\;. \tag{2.4}$$
De la même façon, en développant $g(t,s+\Delta s) = f(u(t,s+\Delta s), v(t,s+\Delta s))$ pour $(t,s+\Delta s) \in A$, on obtient
$$\lim_{\Delta s \longrightarrow 0} \frac{g(t,s+\Delta s)-g(t,s)}{\Delta s} \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}(u,v)\frac{\partial u}{\partial s}(t,s) \;+\; \frac{\partial f}{\partial y}(u,v)\frac{\partial v}{\partial s}(t,s)\;.$$
d'où la formule
$$\frac{\partial g}{\partial s}(t,s) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}(u,v)\frac{\partial u}{\partial s}(t,s) \;+\; \frac{\partial f}{\partial y}(u,v)\frac{\partial v}{\partial s}(t,s)\;. \tag{2.5}$$
De façon générale, on utilise un abus de langage consistant à noter $x = u(t,s)$ et $y = v(t,s)$, pour écrire les formules (2.4) et (2.5) ainsi
$$\frac{\partial g}{\partial t} \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial t} \;+\; \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial t}\;;\;\; \frac{\partial g}{\partial s} \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial s} \;+\; \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial s}\;.$$
Par exemple, pour $x = r\ cos\theta,\;\; y = r\ sin\theta$ (coordonnées polaires) on obtient les formules
$$\frac{\partial g}{\partial r} \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}\,cos\theta \;+\; \frac{\partial f}{\partial y}\,sin\theta\;\;,\;\; \frac{\partial g}{\partial \theta} \;=\; -r\,\frac{\partial f}{\partial x}\,sin\theta \;+\; r\,\frac{\partial f}{\partial y}\,cos\theta\;.$$

2.2 La formule des accroissements finis

La formule des accroissements finis pour une fonction d'une seule variable se généralise simplement.

Théorème 2.2 *Soit $(x,y) \in K$, tel qu'il existe $\eta > 0$ pour lequel $\{(x+h, y+k)|\ \sqrt{h^2+k^2} \leq \eta\} \subset K$, et f une fonction continuement dérivable sur K. Alors il existe $\theta \in]0,1[$ tel que*
$$f(x+h,y+k) \;=\; f(x,y) +\; h\frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta h, y+\theta k) \;+\; k\frac{\partial f}{\partial y}(x+\theta h, y+\theta k) \tag{2.6}$$
où $\epsilon(h,k)$ tend vers zéro lorsque $\sqrt{h^2+k^2}$ tend vers zéro.

Démonstration : On utilise la formule des accroissements finis sur la fonction g d'une seule variable t définie sur $[0,1]$ par
$$g(t) \;=\; f(x+th, y+tk)\;.$$
On a $g(1) = f(x+h,y+k)$ et $g(0) = f(x,y)$. Donc il existe $\theta \in]0,1[$ tel que
$$g(1) \;=\; g(0) \;+\; g'(\theta)\;,$$
et comme, d'après (2.4),
$$g'(t) \;=\; h\,\frac{\partial f}{\partial x}(x+th, y+tk) \;+\; k\,\frac{\partial f}{\partial y}(x+th, y+tk),$$
on obtient exactement (2.6).

2.3 La dérivée partielle dans une direction donnée

On se donne un vecteur directeur $n = (n_1, n_2)$, (donc avec $n_1^2 + n_2^2 = 1$). Soit $(x, y) \in K$ tel qu'il existe $\eta > 0$ pour lequel $\{(x+h, y+k) | \sqrt{h^2+k^2} \leq \eta\} \subset K$. On veut la dérivée partielle de f dans la direction n, en (x, y), comme on l'a déjà fait pour $n = (1, 0)$ (c'est $\frac{\partial f}{\partial x}$) et pour $n = (0, 1)$ (c'est $\frac{\partial f}{\partial y}$). On la notera $\frac{\partial f}{\partial n}(x, y)$. En développant $f(x + n_1 h, y + n_2 k)$, il vient

$$f(x + n_1 h, y + n_2 k) \;=\; f(x, y) \;+\; n_1 h \,\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \;+\; n_2 k \,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \;+\; \sqrt{h^2 + k^2}\; \epsilon(h, k)$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial n}\,(x, y) \;=\; n_1 \,\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \;+\; n_2 \,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,. \tag{2.7}$$

On remarque qu'il s'agit en fait du produit scalaire de n par $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$, le vecteur gradient de f.

3 Les dérivées partielles d'ordre deux

On a vu que, lorsqu'elles existent, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont des fonctions définies sur K, à valeurs dans $\mathbb{R}$; on peut aussi envisager de les dériver à leur tour. On notera

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \;=\; \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x}(x, y) \;\;,\;\; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \;=\; \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}(x, y)\;,$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \;=\; \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}(x, y) \;\;,\;\; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \;=\; \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y}(x, y)\;.$$

Théorème 3.1 (Théorème de Schwarz) *Si les fonctions* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *sont continues en* (x, y), *on a l'égalité*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \;=\; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)\,. \tag{3.1}$$

Démonstration Soit $(x, y) \in K$; on évalue de deux façons différentes la quantité

$$A(h, k) \;=\; \frac{1}{hk}\,\left(f(x + h, y + k) \;-\; f(x + h, y) \;-\; f(x, y + k) \;+\; f(x, y)\right)$$

pour h, k tels que $(x+h, y+k) \in K$. On a dans un premier temps, par deux applications succèssives de la formule des accroissements finis (d'abord sur x, et ensuite sur y),

$$A(h, k) \;=\; \frac{1}{k}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta_1 h, y + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta_1 h, y)\right) \;=\; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x + \theta_1 h, y + \theta_2 k)\;,$$

qui tend vers $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ lorsque $\sqrt{h^2 + k^2} \longrightarrow 0$. Dans un deuxième temps, on a, en inversant les applications de ces formules d'accroissemenst finis, (donc d'abord sur y, et ensuite sur x)

$$A(h,k) \;=\; \frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x+h, y+\theta_2' k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y+\theta_2' k)\right) \;=\; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x+\theta_1' h, y+\theta_2' k)\ ,$$

qui tend vers $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ lorsque $\sqrt{h^2+k^2} \longrightarrow 0$. D'où l'identité.
Remarquons a posteriori que $\theta_1 = \theta_1'$, $\theta_2 = \theta_2'$.
Définition Lorsque les fonctions $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ existent et sont continues sur une partie B de K, on dit que f est deux fois continuement dérivable sur B.

3.1 La formule de Taylor

On a le résultat suivant.

Théorème 3.2 *Soit $(x,y) \in K$, et $\eta > 0$ tel que $B_\eta(x,y) = \{(x+h, y+k) |\ \sqrt{h^2+k^2} \leq \eta\} \subset K$, et f une fonction deux fois continuement dérivable sur $B_\eta(x,y)$. Alors*

$$\begin{aligned} f(x+h,y+k) \;&=\; f(x,y) \;+\; h\,\tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \;+\; k\,\tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \;+ \\ +\; \tfrac{h^2}{2}\,\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \;+\; hk\,\tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \;&+\; \tfrac{k^2}{2}\,\tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \;+\; (h^2+k^2)\epsilon(h,k)\ , \end{aligned} \tag{3.2}$$

où $\epsilon(h,k)$ tend vers zéro lorsque $\sqrt{h^2+k^2}$ tend vers zéro.
Démonstration On développe succèssivement

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x,y+k) + h\tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y+k) + \tfrac{h^2}{2}\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y+k) + h^2\epsilon_1(h) \\ &= \Big(f(x,y) + k\tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \tfrac{k^2}{2}\tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) + k^2\epsilon_2(k)\Big) + h\Big(\tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + k\tfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) + k^2\epsilon_3(k)\Big) + \\ &\quad + \Big(\ \tfrac{h^2}{2}\ \tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \;+\; h^2\epsilon_4(k)\Big) \;+\; h^2\epsilon_1(h)\ . \end{aligned}$$

d'où (3.2) après un regroupement des termes, en ayant remarqué que $\Big|hk\Big| \leq \frac{1}{2}(h^2+k^2)$, ce qu'on obtient en écrivant $(\Big|h\Big| - \Big|k\Big|)^2 \geq 0$.

4 Analyse d'un extrémum local

Soit $(x_0,y_0) \in K$ tel qu'il existe $\eta > 0$ pour lequel $B_\eta(x_0,y_0) = \{(x+h,y+k) |\ \sqrt{h^2+k^2} \leq \eta\} \subset K$, et f une fonction deux fois continuement dérivable sur $B_\eta(x_0,y_0)$. Le point (x_0,y_0) correspond à un minimum local strict lorsque

$$\forall (h,k) \text{ si } \;\; 0 \;<\; \sqrt{h^2+k^2} \;<\; \eta \quad \text{alors} \quad f(x_0+h, y_0+k) \;>\; f(x_0,y_0).$$

A partir de la formule de Taylor, on obtient, en posant

$$A \;=\; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\ ,\ B \;=\; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\ ,\ C \;=\; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\ ,$$

l'inégalité

$$h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{1}{2}\Big(h^2 A + 2hkB + k^2 C\Big) + (h^2+k^2)\epsilon(h,k) \;>\; 0\ . \tag{4.1}$$

On prend $k = 0$, $h > 0$. En divisant par h puis en faisant $h \longrightarrow 0$, il vient $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \geq 0$. En prenant toujours $k = 0$, mais maintenant $h < 0$, on obtient, en faisant tendre h vers zéro, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \leq 0$. On en déduit immédiatement que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$.

De façon analogue, on reprend (4.1) où on prend $h = 0$, $k > 0$. En divisant par k puis en faisant $k \longrightarrow 0$, il vient $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \geq 0$. En prenant toujours $h = 0$, mais maintenant $k < 0$, on obtient, en faisant tendre k vers zéro, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \leq 0$. On en déduit immédiatement que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

La formule (4.1) se réduit donc maintenant à

$$\frac{1}{2}\,\Big(h^2 A + 2hkB + k^2 C\Big) \;+\; (h^2 + k^2)\epsilon(h, k) \;>\; 0$$

En introduisant un paramètre λ tel que $h = \lambda k$, il vient

$$\frac{k^2}{2}\,\Big(\lambda^2 A + 2\lambda B + C\Big) \;+\; k^2(\lambda^2 + 1)\,\epsilon(\lambda k, k) \;>\; 0\,.$$

On divise par k^2 (qui est positif), pour obtenir, après passage à la limite lorsque $k \longrightarrow 0$,

$$\lambda^2\, A \;+\; 2\,\lambda\, B \;+\; C \;>\; 0\,. \tag{4.2}$$

Ce polynôme du second degré en λ n'a aucune racine réelle, et donc son discréminent réduit est strictement négatif, c'est à dire

$$B^2 \;-\; A\, C \;<\; 0\,. \tag{4.3}$$

On a réuni les conditions pour qu'un point (x_0, y_0) soit un minimum : (avec les notations précédentes)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0,\ B^2 - AC < 0,\ A > 0\,. \tag{4.4}$$

En effet, si $A < 0$, on a nécessairement $C < 0$ pour satisfaire (4.3), et le polynôme (4.2) va devenir négatif pour les petites valeurs de λ.

On procède de façon similaire pour caractériser un maximum local. Le point (x_0, y_0) correspond à un maximum local strict lorsque

$$\forall (h, k)\ \text{si}\quad 0 \;<\; \sqrt{h^2 + k^2} \;<\; \eta \quad \text{alors} \quad f(x_0 + h, y_0 + k) \;<\; f(x_0, y_0).$$

d'où l'inégalité, avec les mêmes notations que précédemment,

$$h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{1}{2}\Big(h^2 A + 2hkB + k^2 C\Big) + (h^2 + k^2)\epsilon(h, k) \;>\; 0\,. \tag{4.5}$$

On prend $k = 0$, $h > 0$. En divisant par h puis en faisant $h \longrightarrow 0$, il vient $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \leq 0$. En prenant toujours $k = 0$, mais maintenant $h < 0$, on obtient, en faisant tendre h vers zéro, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \geq 0$. On en déduit immédiatement que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$.

De façon analogue, on reprend (4.5) et on prend $h = 0$, $k > 0$. En divisant par k puis en faisant $k \longrightarrow 0$, il vient $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \leq 0$. En prenant toujours $h = 0$, mais maintenant $k < 0$, on obtient, en faisant tendre k vers zéro, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \geq 0$. On en déduit immédiatement que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

La formule (4.5) se réduit donc maintenant à

$$\frac{1}{2}\left(h^2 A + 2hkB + k^2 C\right) \; + \; (h^2 + k^2)\epsilon(h, k) \; < \; 0$$

En introduisant un paramètre λ tel que $h = \lambda k$, il vient

$$\frac{k^2}{2}\left(\lambda^2 A + 2\lambda B + C\right) \; + \; k^2(\lambda^2 + 1)\,\epsilon(\lambda k, k) \; < \; 0\,.$$

On divise par k^2 (qui est positif), pour obtenir, après passage à la limite lorsque $k \longrightarrow 0$,

$$\lambda^2 A \; + \; 2\,\lambda\, B \; + \; C \; > \; 0\,. \tag{4.6}$$

Ce polynôme du second degré en λ n'a aucune racine réelle, et donc son discréminent réduit est strictement négatif, c'est à dire

$$B^2 \; - \; A\,C \; < \; 0\,. \tag{4.7}$$

On a réuni les conditions pour qu'un point (x_0, y_0) soit un maximum strict : (avec les notations précédentes)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0\;,\; \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0,\; B^2 - AC < 0,\; A < 0\,. \tag{4.8}$$

En effet, si $A > 0$, on a nécessairement $C > 0$ pour satisfaire (4.7), et le polynôme (4.6) va devenir positif pour les petites valeurs de λ.

Lorsque le point (x_0, y_0) est tel que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0\;,\; \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0,\; B^2 - AC > 0\;\;,$$

on est en présence d'un point selle, ou d'un col.

Enfin, lorsque le point (x_0, y_0) est tel que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0\;,\; \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0,\; B^2 - AC \; = \; 0\;\;,$$

il convient de procéder à une étude particularisée pour conclure.