# Intégration et Espaces de Sobolev à Valeurs Vectorielles.

Jérôme Droniou[1]

20/04/2001

[1]Université de Provence, CMI, Technopôle de Château Gombert, 39 rue F.Joliot Curie, 13453 Marseille Cedex 13
email: droniou@cmi.univ-mrs.fr

# Table des Matières

# Chapitre 1

# Intégration à Valeurs Vectorielles

En supposant connue la théorie de l'intégrale de Lebesgue des fonctions réelles, nous établissons la théorie de l'intégrale de fonctions à valeurs dans des espaces de Banach.
Dans tout ce qui suit, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré et $E$ est un espace de Banach (sur $\mathbb{R}$) dont nous noterons la norme $|| \cdot ||$.

## 1.1 Problèmes de Mesurabilité

La principale difficulté de l'intégrale à valeurs vectorielles réside dans la définition de la mesurabilité des fonctions: la notion de "mesurabilité" introduite pour l'intégrale des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ n'est pas suffisante, et il est nécessaire d'introduire la notion de "$\mu$-mesurabilité", i.e. d'une mesurabilité qui dépend tout autant de la $\sigma$-algèbre $\mathcal{A}$ que de la mesure $\mu$.
Dans le cas réel, ces deux notions sont équivalentes et c'est pourquoi seule la première est nécessaire.

### 1.1.1 Mesurabilité: Quelques Rappels

**Définition 1.1.1** *Une fonction $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ entre deux espaces mesurables est dite mesurable si, pour tout $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.*

Remarques:

1) Lorsque la mesure $\mu$ est complète, changer une fonction $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to (Y, \mathcal{B})$ sur un ensemble de mesure nulle ne change pas le caractère de mesurabilité de $f$: si $f = \widetilde{f}$ sauf sur $A$ de mesure nulle, alors pour tout $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) \subset \widetilde{f}^{-1}(B) \cup A$ et $\widetilde{f}^{-1}(B) \subset f^{-1}(B) \cup A$, donc, puisque $A$ est de mesure nulle et tout sous-ensemble de $A$ est mesurable (complétude de la mesure), $f^{-1}(B)$ est mesurable si et seulement si $\widetilde{f}^{-1}(B)$ est mesurable.

2) Dans tous les cas qui nous intéressent ici, l'espace d'arrivée $Y$ des fonctions est naturellement muni d'une structure topologique; la $\sigma$-algèbre $\mathcal{B}$ alors considérée sur $Y$ sera toujours celle induite par cette structure, c'est à dire la $\sigma$-algèbre des boréliens.

**Proposition 1.1.1** *Si $(f_n)_{n \geq 1}$ est une suite de fonctions mesurables sur $X$ à valeurs dans un espace métrique $Y$ et si $f_n \longrightarrow f$ simplement, alors $f$ est mesurable.*

Remarques:

1) Ce résultat reste vrai si $Y$ n'est plus métrique mais vérifie: tout ouvert de $Y$ est réunion dénombrable de fermés.

2) Lorsque la mesure $\mu$ est complète, il suffit que $f_n \to f$ $\mu$-presque partout pour que $f$ soit mesurable car, dans ce cas, on peut changer $f$ en $\widetilde{f}$ et les $f_n$ en $\widetilde{f_n}$ sur un ensemble de mesure nulle de telle sorte que $\widetilde{f_n} \to \widetilde{f}$ partout — on a alors $\widetilde{f_n}$ mesurable donc $\widetilde{f}$ mesurable, et, comme on a vu, cela implique (dans le cas où $\mu$ est complète) la mesurabilité de $f$.

Démonstration:
Lorsque $U$ est ouvert, on a pour tout $m \in \mathbb{N}$, $f^{-1}(U) \subset \bigcup_{k \geq m} f_k^{-1}(U)$, donc

$$f^{-1}(U) \subset \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{k \geq m} f_k^{-1}(U).$$

Lorsque $F$ est fermé,

$$\bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{k \geq m} f_k^{-1}(F) \subset f^{-1}(F).$$

Soit $U$ un ouvert quelconque de $Y$ et notons $U_n = \{x \in U \mid d(x, U^c) > 1/n\}$ (ouvert), $F_n = \{x \in U \mid d(x, U^c) \geq 1/n\}$ (fermé). On a alors $U = \bigcup_{n \geq 1} U_n = \bigcup_{n \geq 1} F_n$ et $U_n \subset F_n$, donc

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{n \geq 1} f^{-1}(U_n) \subset \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{k \geq m} f_k^{-1}(U_n)$$

et

$$\begin{aligned} f^{-1}(U) = \bigcup_{n \geq 1} f^{-1}(F_n) &\supset \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{k \geq m} f_k^{-1}(F_n) \\ &\supset \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{k \geq m} f_k^{-1}(U_n). \end{aligned}$$

Ainsi, $f^{-1}(U) = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{k \geq m} f_k^{-1}(U_n)$ est mesurable. ■

On note $\mathbf{1}_A : X \to \{0, 1\}$ la fonction caractéristique d'un ensemble $A \subset X$, i.e. $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbf{1}_A(x) = 0$ si $x \notin A$.

**Définition 1.1.2** *Une fonction $s : X \to E$ est dite simple si elle est mesurable, s'annule en dehors d'un ensemble de mesure fini et prend un nombre fini de valeurs. On note $S(X; E)$ l'ensemble des fonctions simples $X \to E$.*

Remarques:

1) Une fonction simple $s \in S(X; E)$ admet donc une unique écriture

$$s = \sum_{i=0}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i},$$

avec $a_0 = 0$, $(a_1, \ldots, a_n)$ distincts non nuls, $(A_0, \ldots, A_n)$ partition mesurable de $X$ et $(A_1, \ldots A_n)$ de mesures finies ($A_0 = s^{-1}(\{0\})$, $(a_1, \ldots, a_n)$ sont les valeurs distinctes non nulles — en nombre fini — de $s$ et $A_i = s^{-1}(\{a_i\})$ mesurable de mesure fini car inclus dans $s^{-1}(\{0\})^c$). Sauf mention contraire, c'est toujours cette écriture que l'on adoptera.

2) $S(X; E)$ est un espace vectoriel et la multiplication d'une fonction simple par la fonction caractéristique d'un ensemble mesurable $A$ donne une fonction simple: cela vient de $\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{A \cap B}$. Cela implique entre autres que lorsque l'on a une fonction simple $s$, on peut toujours décider de la changer sur un ensemble mesurable $A$ en décidant que $s_{|A} = 0$, et elle reste une fonction simple.

Lorsque $X$ est de mesure $\sigma$-finie, une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ est mesurable si et seulement si elle est limite simple presque partout de fonctions simples; c'est d'ailleurs cette seconde propriété, "être limite simple de fonctions simples", qui est importante dans la définition de l'intégrale. Puisque ces deux propriétés ne sont pas, dans le cas général, équivalentes, nous avons besoin d'une autre notion que celle de "mesurabilité".

### 1.1.2 $\mu$-Mesurabilité

**Définition 1.1.3** *Une fonction $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to E$ est dite $\mu$-mesurable s'il existe une suite de $S(X; E)$ qui converge $\mu$-presque partout vers $f$.*

Lorsque l'espace mesuré est *complet*, la $\mu$-mesurabilité implique donc la mesurabilité; dans le cas non-complet, ceci est fréquemment mis en défaut.

Cependant, si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré et $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ est son complété, alors toute fonction $\overline{\mu}$-mesurable est égale, en dehors d'un ensemble $\Lambda \in \mathcal{A}$ de mesure nulle, à une fonction $\mu$-mesurable. Pour voir cela, on raisonne ainsi:

- Si $B \in \overline{\mathcal{A}}$, alors $B = A_B \cup N_B$, avec $A_B \in \mathcal{A}$, $N_B \subset M_B \in \mathcal{A}$ et $\mu(M_B) = 0$, donc $\mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{A_B}$ en dehors de $M_B$.
- Ceci nous permet de voir que, si $s$ est une fonction simple mesurable pour $\overline{\mathcal{A}}$, il existe une fonction simple $t_s$ mesurable pour $\mathcal{A}$ et $M_s \in \mathcal{A}$ de $\mu$-mesure nulle tel que $s = t_s$ en dehors de $M$.
- Soit maintenant $f$ $\overline{\mu}$-mesurable et $s_n$ une suite de fonctions simples mesurables pour $\overline{\mathcal{A}}$ qui converge $\overline{\mu}$-presque partout vers $f$, i.e. sauf sur $N \in \overline{\mathcal{A}}$ de $\overline{\mu}$-mesure nulle; on a alors $N = C \cup N'$, avec $C \in \mathcal{A}$, $N' \subset M \in \mathcal{A}$ de $\mu$-mesure nulle et $\overline{\mu}(N) = \mu(C) = 0$; ainsi $s_n \to f$ en dehors de $C \cup M \in \mathcal{A}$; en notant $t_{s_n}$ une suite de fonctions simples mesurables pour $\mathcal{A}$ et $M_n \in \mathcal{A}$ de $\mu$-mesure nulle tels que $t_n = s_n$ en dehors de $M_n$, on a $\Lambda = C \cup M \cup_{n \geq 1} M_n \in \mathcal{A}$ de $\mu$-mesure nulle, $t_n \mathbf{1}_{X \setminus \Lambda}$ fonction simple mesurable pour $\mathcal{A}$ et $t_n \mathbf{1}_{X \setminus \Lambda} = s_n \mathbf{1}_{X \setminus \Lambda} \to f \mathbf{1}_{X \setminus \Lambda}$ partout, ce qui nous dit que $f \mathbf{1}_{X \setminus \Lambda}$ est une fonction $\mu$-mesurable, égale à $f$ en dehors de $\Lambda \in \mathcal{A}$ de $\mu$-mesure nulle.

Cette remarque nous permet de considérer, à partir de maintenant, uniquement le cas où l'espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est complet (on s'intéresse en fait à des fonctions définies presque partout).

Remarques:

1) Si $f$ est $\mu$-mesurable, elle est mesurable et donc $||f|| : X \to \mathbb{R}^+$ est mesurable.
2) Le concept de $\mu$-mesurabilité est inchangé si l'on modifie $f$ sur un ensemble de mesure nulle.
3) De manière évidente, l'ensemble des fonctions $\mu$-mesurables est un espace vectoriel.
4) Si $E$ s'injecte continuement dans $F$ et $f : X \to E$ est $\mu$-mesurable, alors $f : X \to F$ est $\mu$-mesurable.
5) Si $B : E_1 \times \ldots \times E_r \to F$ est une application $r$-linéaire continue entre espaces de Banach et $f_1 : X \to E_1, \ldots, f_r : X \to E_r$ sont $\mu$-mesurables, alors l'application $B(f_1, \ldots, f_r) : x \in X \to B(f_1(x), \ldots, f_r(x)) \in F$ est $\mu$-mesurable (il suffit de constater que si $s_1, \ldots, s_r$ sont des fonctions simples à valeurs dans $E_1, \ldots, E_r$, alors $B(s_1, \ldots, s_r) : X \to F$ est une fonction simple et d'utiliser la continuité de $B$ pour approcher $B(f_1, \ldots, f_r)$ par des fonctions simples $X \to F$). En particulier, si $g : X \to \mathbb{R}$ est $\mu$-mesurable et $f : X \to E$ est $\mu$-mesurable, alors $gf : X \to E$ est $\mu$-mesurable.

**Proposition 1.1.2** *Si $f$ est $\mu$-mesurable alors:*
*i) $f$ est nulle en dehors d'un sous-ensemble de mesure $\sigma$-fini dans $X$.*
*ii) Quitte à changer $f$ sur un ensemble de mesure nulle, l'image de $f$ est séparable.*

Remarque:

Cette proposition nous dit donc que l'on peut toujours supposer $f$ à support sur une partie de mesure $\sigma$-finie de $X$ et à valeurs dans un sous-espace vectoriel séparable de $E$.

Démonstration:
Soit $s_n$ une suite de fonctions simples qui converge presque partout vers $f$. Notons $A = \{x \in X \mid s_n(x) \not\to f(x)\}$: $A$ est de mesure nulle.
Par définition, pour tout $n \geq 1$, $s_n$ est nulle en dehors d'un ensemble $A_n$ de mesure finie; ainsi, $f$ est nulle en dehors de $A \cup \bigcup_{n \geq 1} A_n$, ensemble de mesure $\sigma$-fini.
Quitte à changer $f$ et les $s_n$ sur $A$ en posant $f_{|A} = s_{n|A} = 0$, on a $s_n \to f$ partout donc, en notant $F_n = s_n(X)$, $F_n$ est fini et l'image de $f$ est incluse dans $\overline{\bigcup_{n \geq 1} F_n}$, qui est séparable. ■

L'étape suivante consiste, comme dans le cas de la mesurabilité, à se demander si la propriété de $\mu$-mesurabilité passe à la limite simple; la réponse est oui, mais n'a rien d'évident.
On aura besoin, pour montrer ceci, du théorème d'Egoroff, qui relie convergence simple et convergence uniforme.

**Théorème 1.1.1** (Egoroff) *Si $X$ est de mesure finie, $(f_n)_{n\geq 1}$ sont mesurables $X \to E$ et convergent $\mu$-presque partout vers $f$, alors $\forall \varepsilon > 0$, il existe $A_\varepsilon$ mesurable tel que $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$ et $f_n \stackrel{CU}{\longrightarrow} f$ sur $X \backslash A_\varepsilon$.*

Démonstration:
$f$ est mesurable en tant que limite simple $\mu$-presque partout de fonctions mesurables, donc pour tous $n \geq 1$, $k \geq 1$, $E_{n,k} = \{x \in X \mid ||f_n(x) - f(x)|| \geq 1/k\}$ est mesurable.
De plus, pour tout $k \geq 1$,

$$\bigcap_{N\geq 1} \bigcup_{n\geq N} E_{n,k} \subset \{x \in X \mid f_r(x) \not\to f(x)\}$$

et $\bigcap_{N\geq 1} \bigcup_{n\geq N} E_{n,k}$ est donc de mesure nulle; en posant $F_{N,k} = \bigcup_{n\geq N} E_{n,k}$, on a donc $\mu(\bigcap_{N\geq 1} F_{N,k}) = 0$, et l'intersection est décroissante. Comme $X$ est de mesure finie, on sait alors que $0 = \mu(\bigcap_{N\geq 1} F_{N,k}) = \lim_{N\to\infty} \mu(F_{N,k})$.
Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $k \geq 1$, on peut donc trouver $N_k \geq 1$ tel que $\mu(F_{N_k,k}) < \varepsilon/2^k$. L'ensemble $A_\varepsilon = \bigcup_{k\geq 1} F_{N_k,k}$ est donc de mesure strictement inférieure à $\varepsilon$ et vérifie

$$X \backslash A_\varepsilon = \bigcap_{k\geq 1} F^c_{N_k,k} = \bigcap_{k\geq 1} \bigcap_{n\geq N_k} E^c_{n,k},$$

ce qui, traduit en quantificateurs, donne: $\forall k \geq 1$, $\exists N_k \geq 1$ tel que, $\forall n \geq N_k$, $\forall x \notin A_\varepsilon$, $x \in E^c_{n,k}$, i.e. $||f_n(x) - f(x)|| < 1/k$, c'est à dire la convergence uniforme de $f_n$ vers $f$ sur $X \backslash A_\varepsilon$. ■

**Théorème 1.1.2** *Si $(f_n)_{n\geq 1}$ sont $\mu$-mesurables $X \to E$ et convergent $\mu$-presque partout vers $f$, alors $f$ est $\mu$-mesurable.*

Démonstration:
$\diamondsuit$ Etape 1: Si $X$ est de mesure finie.
Commençons par un lemme technique:
**Lemme** *Soit $Z$ de mesure finie, $(F_n)_{n\geq 1}$ $\mu$-mesurables $Z \to E$ qui convergent $\mu$-presque partout vers $F$. Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists Z_\varepsilon \subset Z$ tel que $\mu(Z_\varepsilon) < \varepsilon$ et $\exists (S_m)_{m\geq 1}$ simples telles que, pour tout $m \geq 1$, $\sup_{x\notin Z_\varepsilon} ||S_m(x) - F(x)|| \leq 1/m$.*
Pour voir cela, on applique une première fois Egoroff à la suite $(F_n)_{n\geq 1}$: il existe $Z_1$ de mesure inférieure à $\varepsilon/2$ tel que $\sup_{x\notin Z_1} ||F_n(x) - F(x)|| \to 0$; ainsi, en se fixant $m \geq 1$, pour un $n_m$ bien choisit, on a $\sup_{x\notin Z_1} ||F_{n_m}(x) - F(x)|| \leq 1/(2m)$. Mais $F_{n_m}$ est $\mu$-mesurable, donc limite $\mu$-presque partout d'une suite $T^{(m)}_k$ de fonctions simples; une deuxième application du théorème d'Egoroff nous donne $Z_{2,m}$ de mesure inférieure à $(\varepsilon/2)/2^m$ tel que $\sup_{x\notin Z_{2,m}} ||F_{n_m}(x) - T^{(m)}_k(x)|| \to 0$ lorsque $k \to \infty$; donc il existe $k_m$ tel que $\sup_{x\notin Z_{2,m}} ||F_{n_m}(x) - T^{(m)}_{k_m}(x)|| \leq 1/(2m)$. En notant $S_m = T^{(m)}_{k_m}$ et $Z_\varepsilon = Z_1 \cup \bigcup_{m\geq 1} Z_{2,m}$ de mesure inférieure à $\varepsilon$, on a pour tout $x \notin Z_\varepsilon$, pour tout $m \geq 1$, $||F(x) - S_m(x)|| \leq ||F(x) - F_{n_m}(x)|| + ||F_{n_m}(x) - T^{(m)}_{k_m}(x)|| \leq 1/(2m) + 1/(2m) = 1/m$. *CQFD*
Appliquons maintenant ce lemme au problème qui nous intéresse; nous allons voir que l'on peut construire par récurrence une suite $(X_k)_{k\geq 1}$ de parties mesurables de $X$ et des suites de fonctions simples (une suite $(s^{(k)}_m)_{m\geq 1}$ par ensemble $X_k$) telles que:

i) Pour tout $k \geq 1$, $X_k \subset X \backslash (\bigcup_{r=1}^{k-1} X_r)$,
ii) Pour tout $k \geq 1$, $\mu(X \backslash (\bigcup_{r=1}^{k} X_r)) \leq 1/k$,
iii) Pour tout $k \geq 1$, pour tout $m \geq 1$, $s^{(k)}_m = 0$ hors de $X_k$,
iv) $s^{(k)}_m \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} f$ $\mu$-presque partout sur $X_k$.

Le rang $k = 1$ est une simple application du lemme avec $Z = X$, $F_n = f_n$, $F = f$, $\varepsilon = 1$, ce qui nous donne $X_1 = Z \backslash Z_\varepsilon$, $s^{(1)}_m = S_m$ (quitte à redéfinir $S_m$ par 0 hors de $X_1$).
Pour passer du rang $k$ au rang $k+1$, on applique aussi simplement le lemme avec $Z = X \backslash (\bigcup_{r=1}^{k} X_r)$, $F_n = f_n$, $F = f$, $\varepsilon = 1/(k+1)$, ce qui nous donne $X_{k+1} = Z \backslash Z_\varepsilon$, $s^{(k+1)}_m = S_m$ (en posant $s^{(k+1)}_m = 0$ hors de $X_{k+1}$).

Les suites ainsi définies vont nous permettre de construire une suite de fonctions simples $(t_m)_{m\geq 1}$ qui converge vers $f$ $\mu$-presque partout sur $X$. On pose $t_m = s_m^{(1)} + s_m^{(2)} + \cdots + s_m^{(m)}$ (fonction simple): il est facile de voir, avec la propriété iii) des suites $(s_m^{(k)})_{m\geq 1}$, que, pour tout $m \geq k$, $t_m = s_m^{(k)}$ sur $X_k$, et que donc $t_m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} f$ $\mu$-presque partout sur $X_k$, donc sur $\cup_{k\geq 1} X_k$. Comme les $(X_k)_{k\geq 1}$ sont disjoints, et par la propriété ii),

$$\mu\left(X\backslash\left(\bigcup_{r\geq 1} X_r\right)\right) = \mu(X) - \lim_{k\to\infty}\sum_{r=1}^{k}\mu(X_r) = \lim_{k\to\infty}\mu\left(X\backslash\left(\bigcup_{r=1}^{k} X_r\right)\right) = 0.$$

On en déduit que $(t_m)_{m\geq 1}$ converge vers $f$ $\mu$-presque partout sur $X$ lorsque $m \to \infty$.
$\diamondsuit$ Etape 2: Si $X$ n'est pas de mesure finie.
On remarque tout d'abord que $f_n = 0$ hors d'un ensemble $A_n$ de mesure $\sigma$-finie, et donc $f = 0$ hors de $Y = \{x \mid f_n(x) \not\to f(x)\} \cup \bigcup_{n\geq 1} A_n$ de mesure $\sigma$-finie. Notons alors $Y = \bigcup_{N\geq 1} Y_N$, avec les $(Y_N)_{N\geq 1}$ de mesures finies et deux à deux disjoints.
Il est clair que, pour tout $N \geq 1$, $(f_{n\,|Y_N})_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions $\mu$-mesurables $Y_N \to E$ qui converge $\mu$-presque partout sur $Y_N$ vers $f_{|Y_N}$; par l'étape 1, on en déduit — puisque $\mu(Y_N) < +\infty$ — que $f : Y_N \to E$ est $\mu$-mesurable, i.e. qu'il existe une suite $(s_n^{(N)})_{n\geq 1} \in S(Y_N; E)$ qui converge $\mu$-presque partout vers $f$ sur $Y_N$.
Si on définit $s_n^{(N)}$ sur $X$ en entier en posant $s^{(N)}_{n\,|X\backslash Y_N} = 0$, on voit que $s_n^{(N)} \in S(X; E)$; on applique alors la même astuce que précédemment à la partition $Y = \bigcup_{N\geq 1} Y_N$: $t_n = s_n^{(1)} + s_n^{(2)} + \cdots + s_n^{(n)}$ est une fonction simple $X \to E$ et $t_n = s_n^{(N)}$ sur $Y_N$ dès que $n \geq N$, donc $(t_n)_{n\geq 1}$ converge $\mu$-presque partout vers $f$ sur $Y_N$. Ainsi, $(t_n)_{n\geq 1}$ converge $\mu$-presque partout vers $f$ sur $Y$, mais comme $f = t_n = 0$ hors de $Y$, on a bien convergence $\mu$-presque partout sur tout $X$. ■

**Corollaire 1.1.1** *Si $X$ est de mesure $\sigma$-finie et $E$ est séparable, alors $f : X \to E$ est $\mu$-mesurable si et seulement si $f$ est mesurable.*

DÉMONSTRATION:
Le sens $\mu$-mesurable $\Longrightarrow$ mesurable a déjà été vu.
Prenons donc $f$ mesurable et montrons qu'elle est limite simple $\mu$-presque partout de fonctions simples.
Supposons d'abord que $X$ est de mesure finie. Pour tout $n \geq 1$, prenons $(a_k^{(n)})_{k\geq 1}$ une suite dense dans $B(0; n)$ et définissons par récurrence les ensembles

$$\left\{\begin{array}{l} U_1^{(n)} = B(a_1^{(n)}; 1/n) \cap B(0; n) \\ U_k^{(n)} = (B(a_k^{(n)}; 1/n) \cap B(0; n))\backslash(U_1^{n)} \cup \cdots \cup U_{k-1}^{(n)}) \end{array}\right. .$$

On a $B(0; n) = \cup_{k\geq 1} U_k^{(n)}$ (car si $x \in B(0; n)$, il existe $a_{k_p}^{(n)} \to x$ donc, pour un $p \geq 1$, $||a_{k_p}^{(n)} - x|| < 1/n$: en prenant le premier $p$ vérifiant cette propriété, on voit que $x \in U_{k_p}^{(n)}$), et les $(U_k^{(n)})_{k\geq 1}$ sont deux à deux disjoints. Soit $C_k^{(n)} = f^{-1}(U_k^{(n)})$ mesurable dans $X$, et définissons $s_N = \sum_{k=1}^{N} a_k^{(n)} \mathbf{1}_{C_k^{(n)}}$: $s_N$ est une fonction simple (puisque $X$ est de mesure finie, tous les $C_k^{(n)}$ sont de mesures finies) et on a $s_N \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} f_n = \sum_{k\geq 1} a_k^{(n)} \mathbf{1}_{C_k^{(n)}}$ partout (comme les $(C_k^{(n)})_{k\geq 1}$ sont deux à deux disjoints, cette somme est en fait ponctuellement réduite à un terme); la fonction $f_n$ est donc $\mu$-mesurable. De plus, $f_n \to f$ partout: en effet, si $x \in X$, en prenant $n_0 \geq ||f(x)|| + 1$ on a, pour $n \geq n_0$, $f(x) \in B(0; n)$; donc, pour tout $n \geq n_0$, il existe un unique $k_n \geq 1$ tel que $f(x) \in U_{k_n}^{(n)}$ (ces ensembles partitionnent $B(0; n)$), c'est à dire $x \in C_{k_n}^{(n)}$; ainsi, pour tout $n \geq n_0$, $f_n(x) = a_{k_n}^{(n)}$ avec $||a_{k_n}^{(n)} - f(x)|| < 1/n$; on a donc bien $f_n(x) \to f(x)$. Ainsi $f$ est $\mu$-mesurable en tant que limite simple de fonctions $\mu$-mesurables.
Si $X$ est de mesure $\sigma$-finie, alors on écrit $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$, avec les $X_n$ de mesures finies et deux à deux disjoints. Pour tout $n \geq 1$, $f_{|X_n} : X_n \to E$ est mesurable donc $\mu$-mesurable, par ce qui précède puisque $X_n$ est de mesure finie; ainsi, $f\mathbf{1}_{X_n} : X \to E$ est $\mu$-mesurable (il suffit de voir que, si une suite $(s_k^{(n)})_{k\geq 1}$ de $S(X_n; E)$ converge $\mu$-presque partout sur $X_n$ vers $f_{|X_n}$, alors en définissant $s_k^{(n)} = 0$ hors de $X_n$, on obtient une suite de $S(X; E)$ qui converge $\mu$-presque partout vers $f\mathbf{1}_{X_n}$ sur $X$). Or la suite de fonctions

$\mu$-mesurables $F_n = f\mathbf{1}_{X_1} + \cdots + f\mathbf{1}_{X_n}$ converge $\mu$-presque partout vers $f$ sur $X$ puisque, pour tout $x \in X$, il existe $n_0 \geq 1$ tel que $x \in X_{n_0}$ et, pour tout $n \geq n_0$, $F_n(x) = f(x)$ (les $X_n$ sont deux à deux disjoints): $f$ est donc $\mu$-mesurable. ∎

**Corollaire 1.1.2** *Si $X$ est de mesure $\sigma$-finie et $E$ est séparable, alors, en prenant $D$ un ensemble dénombrable dense dans $E$, $f : X \to E$ est $\mu$-mesurable si et seulement si, pour tout $d \in D$, $x \to ||f(x) - d||$ est mesurable $X \to \mathbb{R}^+$.*

Démonstration:
Le sens direct est immédiat, puisque la $\mu$-mesurabilité de $f$ implique la mesurabilité de $f$, donc celle de $||f(\cdot) - d||$.
Pour le sens réciproque, par le corollaire précédent, il suffit de montrer la mesurabilité de $f$. Or $\{B(d; 1/k)\,,\ d \in D\,,\ k \geq 1\}$ forme une base *dénombrable* d'ouverts de $E$ donc il suffit de montrer que, pour tout $d \in D$ et tout $k \geq 1$, $f^{-1}(B(d; 1/k))$ est mesurable dans $X$; or $f^{-1}(B(d; 1/k)) = ||f(\cdot) - d||^{-1}([0, 1/k[)$ est, par hypothèse, mesurable. ∎

Nous aurons besoin, dans le cadre des espaces de Sobolev à valeurs vectorielles, de considérer simultanément plusieurs espaces de Banach à l'arrivée. Le corollaire suivant sera alors utile; bien que naturel, ce résultat n'est pas évident.

**Corollaire 1.1.3** *Soit $X$ un espace mesuré et $E$, $F$ deux espaces de Banach qui s'injectent continuement dans un même espace vectoriel topologique (de sorte que l'on puisse considérer $E \cap F$). Une fonction $f : X \to E \cap F$ est $\mu$-mesurable si et seulement si $f : X \to E$ est $\mu$-mesurable et $f : X \to F$ est $\mu$-mesurable.*

$E \cap F$ est muni de la norme $||\cdot||_{E\cap F} = ||\cdot||_E + ||\cdot||_F$, où $||\cdot||_E$ représente la norme sur $E$ et $||\cdot||_F$ la norme sur $F$. Avec cette définition, $E \cap F$ est un espace de Banach qui s'injecte continuement dans $E$ et dans $F$.
Le problème est le suivant: lorsque $f$ est $\mu$-mesurable à valeurs dans $E$, elle est approximable dans $E$ par une suite de fonctions simples à valeurs dans $E$; de même, si elle est $\mu$-mesurable à valeurs dans $F$, elle est approximable dans $F$ par une suite de fonctions simples à valeurs dans $F$. Mais rien ne dit que les suites qui approchent $f$ dans $E$ et dans $F$ sont les mêmes, i.e. que l'on peut trouver une suite de fonctions simples à valeurs dans $E \cap F$ qui converge simultanément dans $E$ et dans $F$ vers $f$.

Démonstration:
Supposons que $f : X \to E \cap F$ soit $\mu$-mesurable. Comme $E \cap F$ s'injecte continuement dans $E$ et dans $F$, $f : X \to E$ et $f : X \to F$ sont $\mu$-mesurables.
Supposons maintenant que $f : X \to E$ est $\mu$-mesurable et que $f : X \to F$ est $\mu$-mesurable. Quitte à changer $f$ sur un ensemble de mesure nulle, on peut supposer que $X$ est de mesure $\sigma$-finie et que $E$ et $F$ sont des Banach séparables.
On peut alors voir que $E \cap F$ est séparable. En effet, $E$ et $F$ étant des Banach séparables, ils ont des bases d'ouverts $(U_i)_{i\geq 1}$ et $(V_j)_{j\geq 1}$ dénombrables. L'ensemble $\{U_i \cap V_j\,,\ i \geq 1\,,\ j \geq 1\}$ est alors dénombrable est c'est une base d'ouverts de $E \cap F$. Commençons par voir que, pour tout $i \geq 1$ et $j \geq 1$, $U_i \cap V_j$ est un ouvert de $E \cap F$; si $x \in U_i \cap V_j$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_E(x, \varepsilon) \subset U_i$ et $B_F(x, \varepsilon) \subset V_j$ (où $B_{\mathcal{E}}(a, r)$ désigne la boule dans $\mathcal{E}$ de centre $a$ et de rayon $r$); donc $B_E(x, \varepsilon) \cap B_F(x, \varepsilon) \subset U_i \cap V_j$; mais $B_E(x, \varepsilon) \cap B_F(x, \varepsilon) = \{y \in E \cap F\,,\ ||y - x||_E < \varepsilon\,,\ ||y - x||_F < \varepsilon\} \supset \{y \in E \cap F\,,\ ||y - x||_{E\cap F} = ||y - x||_E + ||y - x||_F < \varepsilon\} = B_{E\cap F}(x, \varepsilon)$, donc $U_i \cap V_j$ est bien un voisinage de $x$ dans $E \cap F$. Prouvons maintenant que $(U_i \cap V_j)_{i\geq 1\,,\, j\geq 1}$ est une base d'ouverts de $E \cap F$; si $O$ est un ouvert de $E \cap F$ et $x \in O$, alors il existe $\varepsilon$ tel que $B_{E\cap F}(x, \varepsilon) \subset O$; or $B_E(x, \varepsilon/2) \cap B_F(x, \varepsilon/2) = \{y \in E \cap F\,,\ ||y - x||_E < \varepsilon/2\,,\ ||y - x||_F < \varepsilon/2\} \subset \{y \in E \cap F\,,\ ||y - x||_{E\cap F} = ||y - x||_E + ||y - x||_F < \varepsilon\} = B_{E\cap F}(x, \varepsilon)$, donc $B_E(x, \varepsilon/2) \cap B_F(x, \varepsilon/2) \subset O$; puisque $(U_i)_{i\geq 1}$ est une base d'ouverts de $E$ et $(V_j)_{j\geq 1}$ est une base d'ouvert de $F$, il existe $i \geq 1$ et $j \geq 1$ tel que $x \in U_i \subset B_E(x, \varepsilon/2)$ et $x \in V_j \subset B_F(x, \varepsilon/2)$, ce qui implique $x \in U_i \cap V_j \subset O$ et prouve bien que $(U_i \cap V_j)_{i\geq 1\,,\, j\geq 1}$ est une base d'ouverts de $E \cap F$. $E \cap F$ étant métrique et ayant une base dénombrable d'ouverts, il est séparable.
Pour prouver la $\mu$-mesurabilité de $f : X \to E \cap F$, il suffit donc de prouver que, pour tout $d \in E \cap F$, $x \in X \to ||f(x) - d||_{E\cap F} = ||f(x) - d||_E + ||f(x) - d||_F \in \mathbb{R}^+$ est mesurable. Mais $f : X \to E$ et $f : X \to F$ étant $\mu$-mesurables, $x \to ||f(x) - d||_E$ et $x \to ||f(x) - d||_F$ sont mesurables; on en déduit que $x \to ||f(x) - d||_E + ||f(x) - d||_F$ est mesurable, ce qui conclut cette preuve. ∎

## 1.2 Définition de l'Intégrale

Lorsque $s = \sum_{i=1}^N a_i \mathbf{1}_{A_i}$ est une fonction simple, écrite de telle sorte que $(A_i)_{i=1,\dots,N}$ forme une partition de $X$ (avec, éventuellement, certains ensembles de cette partition vides), on définit son intégrale (un élément de $E$) par

$$\int_X s\,d\mu = \sum_{i=1}^N \mu(A_i)a_i \tag{1.2.1}$$

(en posant, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) \times 0 = 0$, chaque terme de cette somme a un sens puisque, $(A_i)_{i\in[1,N]}$ étant une partition de $X$ et $s$ une fonction simple, $\mu(A_i) < +\infty$ dès que $a_i \neq 0$).
Cette formule définit bien l'intégrale de $s$ de manière intrinsèque, i.e. qui ne dépend pas de l'écriture ci-dessus; en effet, prenons deux écritures $s = \sum_{i=1}^N a_i \mathbf{1}_{A_i} = \sum_{j=1}^P b_j \mathbf{1}_{B_j}$, avec $(A_i)_{i\in[1,N]}$ et $(B_j)_{j\in[1,P]}$ partitions de $X$; on constate alors que

$$\sum_{i=1}^N a_i\mu(A_i) = \sum_{i=1}^N a_i \left(\sum_{j=1}^P \mu(B_j \cap A_i)\right) = \sum_{\{(i,j)\ |\ A_i\cap B_j \neq \emptyset\}} a_i\mu(A_i \cap B_j).$$

Mais $s_{|A_i} = a_i$ et $s_{|B_j} = b_j$ donc, lorsque $A_i \cap B_j \neq \emptyset$, $a_i = b_j$, ce qui donne $\sum_{i=1}^N a_i\mu(A_i) = \sum_{\{(i,j)\ |\ A_i\cap B_j\neq\emptyset\}} b_j\mu(A_i\cap B_j) = \sum_{j=1}^P b_j \left(\sum_{i=1}^N \mu(A_i\cap B_j)\right) = \sum_{j=1}^P b_j\mu(B_j)$.
On remarque que l'intégrale est linéaire $S(X;E) \to E$: si $s = \sum_{i=1}^N a_i\mathbf{1}_{A_i}$ et $t = \sum_{j=1}^P b_j\mathbf{1}_{B_j}$, avec $(A_i)_{i\in[1,N]}$ et $(B_j)_{j\in[1,P]}$ partitions de $X$, et si $\alpha$ est un scalaire, alors $\alpha s + t = \sum_{(i,j)\in[1,N]\times[1,P]}(\alpha a_i + b_j)\mathbf{1}_{A_i\cap B_j}$ et, comme $(A_i\cap B_j)_{(i,j)\in[1,N]\times[1,P]}$ est une partition de $X$, on a

$$\begin{aligned}
\int_X (\alpha s + t)\,d\mu &= \sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^P (\alpha a_i + b_j)\mu(A_i\cap B_j)\\
&= \alpha\sum_{i=1}^N a_i\left(\sum_{j=1}^P \mu(A_i\cap B_j)\right) + \sum_{j=1}^P b_j\left(\sum_{i=1}^N \mu(A_i\cap B_j)\right)\\
&= \alpha\sum_{i=1}^N a_i\mu(A_i) + \sum_{j=1}^P b_j\mu(B_j) = \alpha\int_X s\,d\mu + \int_X t\,d\mu.
\end{aligned}$$

Par l'inégalité triangulaire de la norme de $E$, l'intégrale des fonctions simples vérifie de plus

$$\left|\left|\int_X s\,d\mu\right|\right| \leq \int_X ||s||\,d\mu. \tag{1.2.2}$$

**Définition 1.2.1** *Une fonction $f : X \to E$ est dite intégrable s'il existe une suite $(s_n)_{n\geq1} \in S(X;E)$ telle que $s_n \longrightarrow f$ $\mu$-presque partout et*

$$\int_X ||s_n - f||\,d\mu \longrightarrow 0 \qquad \textit{lorsque } n\to\infty.$$

*On note $\mathcal{L}^1(X;E)$ l'ensemble des fonctions $X \to E$ intégrables.*

On peut remarquer que $\mathcal{L}^1(X;E)$ est un espace vectoriel de fonctions $\mu$-mesurables. Lorsqu'une suite de fonctions simples $(s_n)_{n\geq1}$ vérifie les hypothèses de cette définition, on dira qu'elle est approximante pour $f$.

**Proposition 1.2.1** (Critère d'intégrabilité) *$f : X \to E$ est intégrable si et seulement si $f$ est $\mu$-mesurable et $\int_X ||f||\,d\mu < +\infty$*

Démonstration:
Le sens direct vient de l'inégalité triangulaire sur la norme de $E$, qui donne $\int_X ||f||\,d\mu \leq \int_X ||s_n - f||\,d\mu + \int_X ||s_n||\,d\mu < +\infty$.

Pour le sens réciproque, on prend une suite $(t_n)_{n\geq 1}$ de fonctions simples qui converge $\mu$-presque partout vers $f$; soit alors la suite de fonctions simples

$$s_n = t_n \mathbf{1}_{\{x\in X \mid ||t_n(x)||\leq 2||f(x)||\}}.$$

On constate que $(s_n)_{n\geq 1}$ converge $\mu$-presque partout vers $f$: si $f(x) = 0$ alors $s_n(x) = 0$, et pour tous les $x \in X$ tels que $||f(x)|| > 0$ et $t_n(x) \to f(x)$, i.e. pour $\mu$-presque tout $x$ tel que $||f(x)|| > 0$, il existe $n_0 \geq 1$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $||t_n(x)|| \leq 2||f(x)||$, donc $s_n(x) = t_n(x)$ lorsque $n \geq n_0$ et $s_n(x) \to f(x)$ pour ces $x \in X$; ainsi $||s_n - f|| \to 0$ $\mu$-presque partout et $||s_n - f|| \leq 3||f||$, avec $||f|| \in L^1(X;\mathbb{R}^+)$, donc par le théorème de convergence dominée (pour l'intégrale à valeurs réelles), $\int_X ||s_n - f||\,d\mu \to 0$ lorsque $n \to \infty$ et $(s_n)_{n\geq 1}$ est bien une suite approximante pour $f$. ■

Lorsque $f \in \mathcal{L}^1(X;E)$ et $(s_n)_{n\geq 1}$ est une suite approximante pour $f$, on note que

$$\begin{aligned}\left|\left|\int_X (s_n - s_m)\,d\mu\right|\right| &\leq \int_X ||s_n - s_m||\,d\mu \\ &\leq \int_X ||s_n - f||\,d\mu + \int_X ||s_m - f||\,d\mu,\end{aligned}$$

et que donc $(\int_X s_n\,d\mu)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $E$: elle converge donc dans $E$ vers un certain $l_s$. De plus, la limite obtenue est indépendante de la suite approximante choisie: si $(s_n)_{n\geq 1}$ et $(t_n)_{n\geq 1}$ sont deux suite approximantes pour $f$ dont les intégrales convergent respectivement vers $l_s$ et $l_t$, on voit que

$$\begin{aligned}\left|\left|\int_X (s_n - t_n)\,d\mu\right|\right| &\leq \int_X ||s_n - t_n||\,d\mu \\ &\leq \int_X ||s_n - f||\,d\mu + \int_X ||t_n - f||\,d\mu,\end{aligned}$$

ce qui donne $l_s - l_t = \lim_{n\to\infty} \int_X (s_n - t_n)\,d\mu = 0$. On peut donc maintenant définir l'intégrale d'une fonction intégrable.

**Définition 1.2.2** *Si $f \in \mathcal{L}^1(X;E)$, l'intégrale de $f$ est*

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n\,d\mu,$$

*où $(s_n)_{n\geq 1}$ est une suite approximante pour $f$.*

Remarque:

> Lorsque $A \subset X$ est mesurable et $f$ est intégrable, alors $f\mathbf{1}_A$ est intégrable et on définit $\int_A f\,d\mu = \int_X f\mathbf{1}_A\,d\mu$.

On note que l'intégrale est linéaire $\mathcal{L}^1(X;E) \to E$ et que, si $f = g$ $\mu$-presque partout, alors $\int_X f\,d\mu = \int_X g\,d\mu$.
On peut donc maintenant, tout comme dans le cas réel, quotienter l'espace $\mathcal{L}^1(X;E)$ par la relation "être égal $\mu$-presque partout", et l'intégrale conserve un sens sur cet espace quotient (l'intégrale d'un élément du quotient est posée égale à l'intégrale de n'importe quelle fonction de $\mathcal{L}^1(X;E)$ que cet élément représente). Soit donc $L^1(X;E) = \mathcal{L}^1(X;E)/\mathrm{pp}$. Alors $f \in L^1(X;E) \to \int_X ||f||\,d\mu \in \mathbb{R}^+$ est une norme sur $L^1(X;E)$ et on a, pour toute suite $(s_n)_{n\geq 1}$ approximante pour $f$, $\int_X ||s_n||\,d\mu \to \int_X ||f||\,d\mu$ (cela vient de l'inégalité triangulaire et de $\left|\int ||s_n|| - \int ||f||\right| \leq \int \left|\,||s_n|| - ||f||\,\right| \leq \int ||s_n - f||$). Ainsi, par passage à la limite dans (1.2.2), on voit que, pour tout $f \in L^1(X;E)$,

$$\left|\left|\int_X f\,d\mu\right|\right| \leq \int_X ||f||\,d\mu. \tag{1.2.3}$$

L'intégrale est donc linéaire continue $L^1(X;E) \to E$.

**Proposition 1.2.2** *Soient $E$ et $F$ des Banach, et $T : E \to F$ une application linéaire continue. Si $f \in L^1(X; E)$, alors $T(f) \in L^1(X; F)$ et on a*

$$T\left(\int_X f\,d\mu\right) = \int_X T(f)\,d\mu.$$

Remarque:

> Cette proposition, très facile, sera d'une grande utilité pour obtenir des résultats sur l'intégrale vectorielle à partir de faits connus sur l'intégrale réelle (cf. les théorèmes de Fubini et de Changement de Variable).

DÉMONSTRATION:
Si $s_n : X \to E$ est une suite approximante pour $f$, alors $T(s_n) : X \to F$ est une suite de fonctions simples (car si $s = \sum a_i \mathbf{1}_{A_i}$, $T(s) = \sum T(a_i)\mathbf{1}_{A_i}$) qui convergent, par continuité de $T$, $\mu$-presque partout vers $T(f)$; de plus, $\int_X ||T(s_n) - T(f)||\,d\mu \leq ||T|| \int_X ||s_n - f||\,d\mu \to 0$, donc $(T(s_n))_{n\geq 1}$ est en fait une suite approximante pour $T(f)$ qui appartient donc à $L^1(X; F)$.
Il est aisé de constater que $\int_X T(s_n)\,d\mu = T\left(\int_X s_n\,d\mu\right)$ donc, puisque $(s_n)_{n\geq 1}$ est approximante pour $f$ et $(T(s_n))_{n\geq 1}$ est approximante pour $T(f)$, on obtient en utilisant à nouveau la continuité de $T$:

$$T\left(\int_X f\,d\mu\right) = \lim_{n\to\infty} T\left(\int_X s_n\,d\mu\right) = \lim_{n\to\infty} \int_X T(s_n)\,d\mu = \int_X T(f)\,d\mu,$$

c'est à dire l'égalité annoncée dans la proposition. ∎

## 1.3 Les Espaces $L^p(X; E)$

### 1.3.1 Définition et Premières Propriétés

**Définition 1.3.1** *i) Pour $1 \leq p < +\infty$, on définit*

$$L^p(X; E) = \left\{ f : X \to E \; \mu\text{-mesurable telle que } \int_X ||f||^p\,d\mu < +\infty \right\} \Big/ pp,$$

*que l'on munit de la norme*

$$||f||_{L^p(X;E)} = \left(\int_X ||f||^p\,d\mu\right)^{1/p}.$$

*ii) On définit*

$$L^\infty(X; E) = \{ f : X \to E \; \mu\text{-mesurable} \mid \exists C > 0\,,\; ||f(x)|| \leq C \text{ pour } \mu\text{-presque tout } x \} / pp,$$

*que l'on munit de la norme*

$$||f||_{L^\infty(X;E)} = \inf\{ C > 0 \mid ||f(x)|| \leq C \text{ pour } \mu\text{-presque tout } x \}.$$

Il faut cependant vérifier que ces ensembles sont bien des espaces vectoriels et que les normes définies sont bien des normes, mais c'est immédiat lorsque l'on constate que (pour tout $1 \leq p \leq +\infty$) $||f||_{L^p(X;E)} = ||\,||f||\,||_{L^p(X;\mathbb{R}^+)}$ et lorsque l'on applique ce que l'on sait déjà pour l'intégrale à valeurs réelles.

Remarques:

1) Par le critère d'intégrabilité, cette définition dans le cas $p = 1$ coincide avec notre définition précédente de $L^1(X; E)$.

2) Lorsque l'on ne précise pas l'espace $E$, cela veut dire que l'on prend $\mathbb{R}$, i.e. on note $L^p(X) = L^p(X; \mathbb{R})$.

3) Si $E$ s'injecte continuement dans $F$, $L^p(X;E)$ s'injecte continuement dans $L^p(X;F)$.

4) Par l'inégalité de Hölder, on voit que si $r \in [p,q]$, alors $L^p(X;E) \cap L^q(X;E) \subset L^r(X;E)$; si $X$ est de mesure finie, on a $L^p(X;E) \hookrightarrow L^q(X;E)$ lorsque $p \geq q$.

5) Si $T : E \to F$ est linéaire continue, alors $T$ induit une application linéaire continue, encore notée $T$, de $L^p(X;E)$ dans $L^p(X;F)$.

6) Soient $(p,q,r) \in [1,+\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Si $B : E \times F \to G$ est bilinéaire continue, alors $B$ induit l'application bilinéaire continue

$$\left\{ \begin{array}{rcl} L^p(X;E) \times L^q(X;F) & \longrightarrow & L^r(X;G) \\ (f,g) & \longrightarrow & B(f,g) \text{ définie par } B(f,g)(x) = B(f(x),g(x)). \end{array} \right.$$

**Théorème 1.3.1** *Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, $L^p(X;E)$ est un Banach.*

Démonstration:
Dans le cas $p = \infty$, prenons $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy dans $L^\infty(X;E)$ et posons

$$A_{n,m} = \{x \in X \mid ||f_n(x) - f_m(x)|| > ||f_n - f_m||_{L^\infty(X;E)}\},$$

ensemble de mesure nulle; $A = \bigcup_{n\geq 1} \bigcup_{m\geq 1} A_{n,m}$ est lui-aussi de mesure nulle. Sur $A^c$, on a $||f_n(x) - f_m(x)|| \leq ||f_n - f_m||_{L^\infty(X;E)}$, donc la suite $(f_n(x))_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans $E$ et elle converge vers $f(x)$; quitte à définir $f$ par 0 hors de $A$, on a ainsi une fonction $f$ limite simple $\mu$-presque partout de $f_n$, et $f$ est donc $\mu$-mesurable. De plus, pour $x \notin A$, on a $||f_n(x) - f(x)|| = \lim_{m\to\infty} ||f_n(x) - f_m(x)||$, et donc ($(f_n)_{n\geq 1}$ étant de Cauchy dans $L^\infty(X;E)$) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \geq 1$ tel que, si $n \geq N$, dès que $x \notin A$, $||f_n(x) - f(x)|| \leq \varepsilon$, c'est à dire (puisque $\mu(A) = 0$), $||f_n - f||_{L^\infty(X;E)} \leq \varepsilon$.
Dans le cas $1 \leq p < +\infty$, nous allons montrer que toute série absolument convergente de $L^p(X;E)$ est convergente dans $L^p(X;E)$ (ce qui est équivalent à la complétude de $L^p(X;E)$). Prenons donc une série $\sum_{n\geq 1} f_n$ absolument convergente dans $L^p(X;E)$, i.e. $M = \sum_{n\geq 1} ||f_n||_{L^p(X;E)} < +\infty$. Définissons $g : X \to [0,+\infty]$ par $g(x) = \sum_{n\geq 1} ||f_n(x)||$: $g$ est mesurable en tant que limite simple de fonctions mesurables; on a, pour tout $N \geq 1$,

$$\left|\left| \sum_{n=1}^{N} ||f_n|| \right|\right|_{L^p(X)} \leq \sum_{n=1}^{N} ||f_n||_{L^p(X;E)} \leq M < +\infty$$

et, en utilisant le lemme de Fatou,

$$\int_X g^p \, d\mu = \int_X \liminf_{N\to\infty} \left( \sum_{n=1}^{N} ||f_n|| \right)^p d\mu \leq \liminf_{N\to\infty} \left|\left| \sum_{n=1}^{N} ||f_n|| \right|\right|_{L^p(X)}^p \leq M^p < +\infty,$$

donc $g$ est finie $\mu$-presque partout. Comme $E$ est un Banach, cela signifie que, pour $\mu$-presque tout $x$, $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge vers $F(x)$; quitte à définir $F$ par 0 là où la convergence n'a pas lieu, $\sum_{n=1}^{N} f_n \to F$ $\mu$-presque partout et $F$ est donc $\mu$-mesurable; de plus, en faisant tendre $N$ vers l'infini dans l'inégalité $\left|\left|\sum_{n=1}^{N} f_n\right|\right| \leq g$, on a $||F|| \leq g$ $\mu$-presque partout, et $F$ est donc dans $L^p(X;E)$. Comme $F - \sum_{n=1}^{N} f_n = \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=N+1}^{k} f_n$ $\mu$-presque partout, en utilisant à nouveau le lemme de Fatou, on obtient

$$\begin{aligned} \int_X \left|\left| F - \sum_{n=1}^{N} f_n \right|\right|^p d\mu &= \int_X \liminf_{k\to\infty} \left|\left| \sum_{n=N+1}^{k} f_n \right|\right|^p d\mu \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} \left|\left| \sum_{n=N+1}^{k} f_n \right|\right|_{L^p(X;E)}^p \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} \left( \sum_{n=N+1}^{k} ||f_n||_{L^p(X;E)} \right)^p \\ &\leq \left( \sum_{n\geq N+1} ||f_n||_{L^p(X;E)} \right)^p . \end{aligned}$$

Mais $\sum_{n\geq 1} ||f_n||_{L^p(X;E)}$ converge, donc le dernier terme de cette suite d'inégalités tend vers 0 lorsque $N \to \infty$, ce qui veut bien dire que la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge vers $F$ dans $L^p(X;E)$. ■

**Proposition 1.3.1** *Si $1 \leq p < +\infty$, alors $S(X;E)$ est dense dans $L^p(X;E)$.*

DÉMONSTRATION:
Soit $1 \leq p < +\infty$, $f \in L^p(X;E)$ et $t_n \in S(X;E)$ une suite approximante pour $f$; la suite $s_n = t_n \mathbf{1}_{\{x\in X \mid ||t_n(x)||\leq 2||f(x)||\}}$ est une suite de fonctions simples qui convergent $\mu$-presque partout vers $f$ et qui vérifie de plus $||s_n - f|| \leq 3||f|| \in L^p(X)$, donc par le théorème de convergence dominée pour l'intégrale à valeurs réelles, $||s_n - f|| \to 0$ dans $L^p(X)$, c'est à dire $s_n \to f$ dans $L^p(X;E)$ et le résultat est prouvé. ■

**Corollaire 1.3.1** *Si $1 \leq p < +\infty$, $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $D$ est une partie dense de $E$, alors $\{\sum_{i=1}^n d_i\varphi_i;\ n \geq 1\,,\ d_i \in D\,,\ \varphi_i \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega;\mathbb{R})\}$ est dense dans $L^p(\Omega;E)$.*

Remarques:

1) Sauf mention contraire, lorsque $X$ est une partie de $\mathbb{R}^N$, $\mu$ est toujours la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$ restreinte à $X$ (elle est complète lorsque l'on considère sur $X$ la $\sigma$-algère des Lebesguiens).

2) Une fonction continue $\varphi : \Omega \to E$ est $\mu$-mesurable: en effet, pour tout compact $K$ de $\Omega$, en notant $(K_1^n, \dots, K_{l_n}^n)$ une partition mesurable de $K$ en ensembles de diamètres inférieurs à $1/n$ et en prenant $x_i^n \in K_i^n$, $\varphi$ est limite (uniforme) sur $K$ de la suite de fonctions simples $s_n = \sum_{i=1}^{l_n} \varphi(x_i^n)\mathbf{1}_{K_i^n}$. Ce corollaire nous dit donc que $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega;E) \subset L^p(\Omega;E)$ avec densité.

3) On déduit de ce résultat, par exemple, la densité de

$$\left\{\sum \varphi_i(x)\psi_i(y)\,,\ \varphi_i \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega;\mathbb{R})\,,\ \psi_i \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega';\mathbb{R})\right\} \subset \mathcal{C}_c^\infty(\Omega\times\Omega')$$

dans $L^p(\Omega;L^q(\Omega'))$, lorsque $\Omega$ et $\Omega'$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^N$ et $\mathbb{R}^P$, et lorsque $p$ et $q$ sont finis.

DÉMONSTRATION:
Pour montrer ce corollaire, il suffit, grâce à la proposition précédente, d'approcher toute fonction simple $\sum a_i\mathbf{1}_{A_i}$ dans $L^p(\Omega;E)$; en fait, il suffit d'approcher, pour tout $A$ mesurable de mesure finie inclus dans $\Omega$ et tout $a \in E$, $a\mathbf{1}_A$ par des fonctions de la forme $d\varphi$, avec $d \in D$ et $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega;\mathbb{R})$.
Les résultats de densité (par convolution) dans les espaces $L^p(\Omega)$ nous disent que $\mathbf{1}_A$ est limite, dans $L^p(\Omega)$, d'une suite de fonctions $\varphi_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega;\mathbb{R})$, et par densité de $D$, on peut choisir $d_n \in D$ telle que $d_n \to a$ dans $E$. On voir alors que $||a\mathbf{1}_A - d_n\varphi_n||_{L^p(\Omega;E)} \leq ||a-d_n||\,||\mathbf{1}_A||_{L^p(\Omega;E)} + ||d_n||\,||\mathbf{1}_A - \varphi_n||_{L^p(\Omega;E)}$, donc, puisque $||d_n||$ est bornée et $||a-d_n|| \to 0$, $||\mathbf{1}_A - \varphi_n||_{L^p(\Omega;E)} \to 0$, le corollaire est démontré. ■

**Corollaire 1.3.2** *Si $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $E$ est un Banach séparable, alors pour tout $1 \leq p < +\infty$, $L^p(\Omega;E)$ est séparable.*

DÉMONSTRATION:
Soit $D$ dénombrable dense dans $E$. Par le corollaire précédent, $\Lambda = \{\sum_{finie} a_i\varphi_i\,,\ a_i \in D\,,\ \varphi_i \in \mathcal{C}_c^0(\Omega;\mathbb{R}^+)\}$ est dense dans $L^p(\Omega;E)$. Il suffit donc de trouver une partie dénombrable $\Gamma$ de $L^p(\Omega;E)$ telle que toute fonction de $\Lambda$ soit limite, dans $L^p(\Omega;E)$, d'une suite de $\Gamma$.
Soit $K_n = \overline{B}_{\mathbb{R}^N}(0,n) \cap \{x\in\Omega \mid d(x,\Omega^c) \geq 1/n\}$ compact de $\Omega$. Montrons que l'ensemble dénombrable

$$\Gamma = \left\{\sum_{finie} a_i P^{[i]}_{|K_n};\ n\geq 1, a_i \in D, P^{[i]} \text{ polynôme de } N \text{ variables à coefficients rationnels}\right\}$$

convient. Soit $f = \sum_{i=1}^r a_i\varphi_i \in \Lambda$; $\cup_i \mathrm{supp}(\varphi_i)$ est un compact de $\Omega$, donc il existe $n \geq 1$ tel que $\cup_i \mathrm{supp}(\varphi_i) \subset K_n$. On sait (théorème de Stone-Weierstrass) que, pout tout $i \in [1,r]$, il existe une suite de polynômes $(Q_k^{[i]})_{k\geq 1}$ qui converge uniformément sur $K_n$ vers $\varphi_i$; prenons alors $P_k^{[i]}$ polynôme à coefficients rationnels tel que $\sup_{x\in K_n}|P_k^{[i]}(x)-Q_k^{[i]}(x)|\leq 1/k$. La suite $(P_k^{[i]})_{k\geq 1}$ converge uniformément vers $\varphi_i$ sur $K_n$ et on a donc

$$\begin{aligned}\int_\Omega |P_{k\,|K_n}^{[i]}-\varphi_i|^p\,d\mu &= \int_{K_n}|P_k^{[i]}-\varphi_i|^p\,d\mu\\ &\leq ||P_k^{[i]}-\varphi_i||_{L^\infty(K_n)}^p\mu(K_n)\overset{k\to\infty}{\to} 0.\end{aligned}$$

La suite de fonctions $g_k=\sum_{i=1}^r a_iP_{k\,|K_n}^{[i]}\in\Gamma$ vérifie alors

$$||g_k-f||_{L^p(\Omega;E)}\leq\sum_{i=1}^r ||a_i||||P_{k\,|K_n}^{[i]}-\varphi_i||_{L^p(\Omega)}\overset{k\to\infty}{\to} 0,$$

et la séparabilité de $L^p(\Omega;E)$ est donc prouvée. ■

Le lemme suivant, très naturel et aisé à démontrer, peut s'avérer utile lorsque l'on doit manipuler simultanément plusieurs espaces de Banach à l'arrivée.

**Lemme 1.3.1** *Soit $X$ un espace mesuré et $p\in[1,\infty]$. On suppose que $E$ et $F$ sont des espaces de Banach qui s'injectent continuement dans un même espace vectoriel topologique. On a alors $L^p(X;E\cap F)=L^p(X;E)\cap L^p(X;F)$ (algébriquement et topologiquement).*

DÉMONSTRATION:
Comme $E\cap F$ s'injecte continuement dans $E$ et dans $F$, $L^p(X;E\cap F)$ s'injecte continuement dans $L^p(X;E)$ et dans $L^p(X;F)$, donc dans $L^p(X;E)\cap L^p(X;F)$.
Prenons maintenant $f\in L^p(X;E)\cap L^p(X;F)$. $f:X\to E$ et $f:X\to F$ sont donc $\mu$-mesurables; on sait alors que cela implique la $\mu$-mesurabilité de $f:X\to E\cap F$.
Si $p<\infty$, on a $||f(x)||_{E\cap F}^p=(||f(x)||_E+||f(x)||_F)^p\leq 2^p||f(x)||_E^p+2^p||f(x)||_F$, donc

$$\begin{aligned}\int_X ||f(x)||_{E\cap F}^p\,d\mu &\leq 2^p\int_X ||f(x)||_E^p\,d\mu+2^p\int_X||f(x)||_F^p\,d\mu\\ &\leq 2^p||f||_{L^p(X;E)}^p+2^p||f||_{L^p(X;F)}^p\\ &\leq 2^{p+1}||f||_{L^p(X;E)\cap L^p(X;F)}<\infty,\end{aligned}$$

donc $f\in L^p(X;E\cap F)$ et $||f||_{L^p(X;E\cap F)}\leq 2^{(p+1)/p}||f||_{L^p(X;E)\cap L^p(X;F)}$, ce qui prouve que $L^p(X;E)\cap L^p(X;F)$ s'injecte continuement dans $L^p(X;E\cap F)$.
Si $p=\infty$, on a, pour $\mu$-presque tout $x\in X$, $||f(x)||_E\leq ||f||_{L^\infty(X;E)}$ et $||f(x)||_F\leq||f||_{L^\infty(X;F)}$, donc $||f(x)||_{E\cap F}\leq ||f||_{L^\infty(X;E)}+||f||_{L^\infty(X;F)}=||f||_{L^\infty(X;E)\cap L^\infty(X;F)}$; cela donne $f\in L^\infty(X;E\cap F)$ et $||f||_{L^\infty(X;E\cap F)}\leq||f||_{L^\infty(X;E)\cap L^\infty(X;F)}$. $L^\infty(X;E)\cap L^\infty(X;F)$ s'injecte donc continuement dans $L^\infty(X;E\cap F)$. ■

### 1.3.2 Théorème de Vitali

**Définition 1.3.2** *Soit $1\leq p<+\infty$. On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq1}$ de $L^p(X;E)$ est p-équi-intégrable si elle vérifie les deux propriétés:*

*i) $\forall\varepsilon>0$, il existe $K\subset X$ de mesure finie tel que $\forall n\geq 1$, on a*

$$\int_{X\backslash K}||f_n||^p\,d\mu<\varepsilon,$$

*ii) $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ tel que, $\forall n\geq1$, $\forall A\subset X$ tel que $\mu(A)<\delta$, on a*

$$\int_A ||f_n||^p\,d\mu<\varepsilon.$$

Une fonction $f\in L^p(X;E)$ vérifie toujours ces deux propriétés. Pour voir cela, on se fixe $\varepsilon>0$ et on prend une fonction simple $s=\sum_{i=1}^r\alpha_i\mathbf{1}_{A_i}:X\to\mathbb{R}^+$ (avec $A_i$ tous de mesures finies) telle que $0\leq s\leq||f||^p$

et $\int_X(||f||^p - s)\,d\mu < \varepsilon/2$ (définition de $\int_X ||f||^p\,d\mu$). Le support de $f$ est de mesure $\sigma$-finie, donc égal à une réunion croissante de $X_n \subset X$ de mesures finies; donc, pour tout $i \in [1,r]$, $\cap_{n\geq 1}(A_i \cap X_n^c)$ est décroissante, formée d'ensembles de mesures finies ($A_i$ est de mesure finie) et égale à l'ensemble vide; il existe donc $n_i \geq 1$ tel que $\mu(A_i \cap X_n^c) < \varepsilon/(2r\alpha_i)$. Cela nous donne, en prenant $n = \sup(n_1,\dots,n_r)$ et $K = X_n$ de mesure finie, $\int_{X\backslash K} s\,d\mu = \sum_{i=1}^r \alpha_i\mu(A_i \cap X_n^c) < \varepsilon/2$, donc

$$\begin{aligned}\int_{X\backslash K} ||f||^p\,d\mu &= \int_{X\backslash K}(||f||^p - s)\,d\mu + \int_{X\backslash K} s\,d\mu\\ &\leq \int_X (||f||^p - s)\,d\mu + \varepsilon/2 < \varepsilon,\end{aligned}$$

ce qui montre que $f$ vérifie la première propriété de la $p$-équi-intégrabilité.
Pour voir le deuxième point, on conserve la fonction simple introduite ci-dessus et on prend $\delta = \varepsilon/(2r\sup(\alpha_1,\dots,\alpha_r))$: on a alors, si $A \subset X$ est de mesure inférieure à $\delta$, $\int_A s\,d\mu = \sum_{i=1}^r \alpha_i\mu(A\cap A_i) < \sum_{i=1}^r \alpha_i\delta \leq \varepsilon/2$, donc pour un tel ensemble $A$,

$$\int_A ||f||^p\,d\mu = \int_A (||f||^p - s)\,d\mu + \int_A s\,d\mu < \varepsilon/2 + \varepsilon/2.$$

Du fait qu'une fonction de $L^p(X;E)$ vérifie les deux propriétés de la $p$-équi-intégrabilité, on déduit aisément qu'une suite finie de fonctions de $L^p(X;E)$ est $p$-équi-intégrable.

**Théorème 1.3.2** (Vitali) *Soit $1 \leq p < +\infty$. Si $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de $L^p(X;E)$ qui converge $\mu$-presque partout vers une fonction $f$, alors*

$$f_n \to f \text{ dans } L^p(X;E) \Longleftrightarrow (f_n)_{n\geq 1} \text{ est } p\text{-équi-intégrable.}$$

Démonstration:
$\diamondsuit$ Sens direct: On a, pour tout $A \subset X$ mesurable,

$$\left(\int_A ||f_n||^p\,d\mu\right)^{1/p} \leq ||f_n - f||_{L^p(X;E)} + \left(\int_A ||f||^p\,d\mu\right)^{1/p}.$$

Comme $f \in L^p(X;E)$ vérifie les deux propriétés de la $p$-équi-intégrabilité, et comme $||f_n - f||_{L^p(X;E)} \to 0$, on en déduit que, à $\varepsilon > 0$, les propriétés sont vérifiées par $f_n$ pour $n$ assez grand. Le nombre de $f_n$ restant est fini, on s'est ramené à une suite finie qui vérifie la $p$-équi-intégrabilité.
$\diamondsuit$ Sens réciproque: On commence par constater que $f$, en tant que limite simple de fonctions $\mu$-mesurables, est $\mu$-mesurable.
Fixons $\varepsilon > 0$ et prenons $K$ et $\delta$ comme dans la définition de $p$-équi-intégrabilité. On sait, par le théorème d'Egoroff et puisque $K$ est de mesure finie, qu'il existe $A_\delta \subset K$ de mesure inférieure à $\delta$ tel que $f_n \stackrel{CU}{\longrightarrow} f$ sur $K\backslash A_\delta$.
On constate d'abord que, par Fatou, en prenant $B = K^c$ ou $A_\delta$,

$$\int_B ||f||^p\,d\mu = \int_B \liminf_{n\to\infty} ||f_n||^p\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int_B ||f_n||^p\,d\mu \leq \varepsilon. \tag{1.3.1}$$

De plus, par convergence uniforme sur $K\backslash A_\delta$, on a

$$\int_{K\backslash A_\delta} ||f - f_n||^p\,d\mu \leq ||f - f_n||^p_{L^\infty(K\backslash A_\delta;E)}\mu(K) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{1.3.2}$$

et $\int_{K\backslash A_\delta} ||f - f_{n_0}||^p\,d\mu$ est donc finie pour un $n_0 \geq 1$; mais

$$\left(\int_{K\backslash A_\delta} ||f||^p\,d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_{K\backslash A_\delta} ||f - f_{n_0}||^p\,d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_{K\backslash A_\delta} ||f_{n_0}||^p\,d\mu\right)^{1/p},$$

donc $\int_{K\backslash A_\delta} ||f||^p\,d\mu$ est aussi finie.

Or

$$\int_X ||f||^p \, d\mu = \int_{K^c} ||f||^p \, d\mu + \int_{A_\delta} ||f||^p \, d\mu + \int_{K \setminus A_\delta} ||f||^p \, d\mu$$

et, comme le membre de droite est fini, $f$ est bien dans $L^p(X; E)$.
On écrit alors

$$\begin{aligned} \int_X ||f - f_n||^p \, d\mu &= \int_{K^c} ||f - f_n||^p \, d\mu + \int_{A_\delta} ||f - f_n||^p \, d\mu + \int_{K \setminus A_\delta} ||f - f_n||^p \, d\mu \\ &= I_n^{(1)} + I_n^{(2)} + I_n^{(3)} \end{aligned}$$

et on a, pour $j = 1$ avec $B_1 = K^c$ ou pour $j = 2$ avec $B_2 = A_\delta$, par (1.3.1),

$$\left(I_n^{(j)}\right)^{1/p} \leq \left(\int_{B_j} ||f||^p \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_{B_j} ||f_n||^p \, d\mu\right)^{1/p} \leq 2\varepsilon^{1/p}$$

et, par (1.3.2), $I_n^{(3)} \to 0$ lorsque $n \to \infty$. On en déduit donc que, pour $n$ assez grand, $||f - f_n||^p_{L^p(X;E)} \leq (2^p + 2^p)\varepsilon + \varepsilon$, c'est à dire la convergence voulue. ∎

**Corollaire 1.3.3** (Compacité $L^p - L^q$) *Soit $1 < p \leq +\infty$ et $X$ de mesure finie. Si $f_n \to f$ $\mu$-presque partout et $(f_n)_{n\geq 1}$ est bornée dans $L^p(X; E)$, alors $f_n \to f$ dans $L^q(X; E)$ pour tout $q < p$.*

Démonstration:
On va vérifier la $q$-équi-intégrabilité de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$, c'est à dire, puisque $X$ est de mesure finie, la deuxième propriété. Pour tout ensemble mesurable $A \subset X$, on a par Hölder entre $p/q > 1$ et $r = (p/q)' < +\infty$,

$$\int_A ||f_n||^q \, d\mu \leq ||f_n||^q_{L^p(X;E)} \mu(A)^{1/r} \leq M^q \mu(A)^{1/r},$$

en notant $M$ un majorant de $||f_n||_{L^p(X;E)}$ indépendant de $n$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta$ tel que, si $\mu(A) < \delta$, $\mu(A)^{1/r} < \varepsilon/M$ (on utilise le fait que $x^{1/r} \to 0$ lorsque $x \to 0$, puisque $r$ est fini): la condition de $q$-équi-intégrabilité est verifiée et le théorème de Vitali permet de conlure. ∎

### 1.3.3 Convergence Dominée et Applications

**Théorème 1.3.3** (Convergence Dominée) *Soit $1 \leq p < +\infty$ et $(f_n)_{n\geq 1}$ des fonctions $\mu$-mesurables $X \to E$. Si la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ vérifie:*
*i) $f_n \to f$ $\mu$-presque partout sur $X$,*
*ii) Il existe $g \in L^p(X)$ telle que, pour tout $n \geq 1$, $||f_n|| \leq g$ $\mu$-presque partout,*
*alors $f_n \to f$ dans $L^p(X; E)$. En particulier, dans le cas $p = 1$,*

$$\int_X f_n \, d\mu \longrightarrow \int_X f \, d\mu.$$

Démonstration:
On sait que $g$, qui est dans $L^p(X)$, vérifie les deux propriétés de la $p$-équi-intégrabilité; il suit donc immédiatement que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$, dont tous les éléments sont majorés par $g$, est $p$-équi-intégrable. Le théorème de Vitali nous assure donc que $f_n \to f$ dans $L^p(X; E)$. ∎

**Théorème 1.3.4** (Réciproque de la Convergence Dominée) *Soit $1 \leq p < +\infty$. Si $f_n \to f$ dans $L^p(X; E)$ alors il existe $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ une suite extraite de $(f_n)_{n\geq 1}$ et $g \in L^p(X)$ telles que:*
*i) $f_{n_k} \longrightarrow f$ $\mu$-presque partout,*
*ii) Pour tout $k \geq 1$, $||f_{n_k}|| \leq g$ $\mu$-presque partout,*
*iii) $\forall \varepsilon > 0$, il existe $A_\varepsilon \subset X$ tel que $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$ et $f_{n_k} \xrightarrow{CU} f$ sur $X \setminus A_\varepsilon$.*

Remarque:

Le résultat iii) n'est pas une simple application du théorème d'Egoroff, car on ne suppose pas $X$ de mesure finie.

Démonstration:
Soit $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ telle que, pour tout $k \geq 1$, $||f_{n_k} - f_{n_{k-1}}||_{L^p(X;E)} \leq 1/(2^{2k})$ (il est possible de trouver une telle sous-suite car $(f_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans $L^p(X;E)$).
Posons $g(x) = ||f_{n_1}(x)|| + \sum_{r\geq 2} ||f_{n_r}(x) - f_{n_{r-1}}(x)||$: par Fatou on voit que $||g||_{L^p(X)} \leq ||f_{n_1}||_{L^p(X;E)} + \sum_{r\geq 2} ||f_{n_r} - f_{n_{r-1}}||_{L^p(X;E)} < +\infty$, donc $g$ appartient à $L^p(X)$ et est finie $\mu$-presque partout. La série $f_{n_1}(x) + \sum_{r\geq 2}(f_{n_r}(x) - f_{n_{r-1}}(x))$ est donc absolument convergente pour $\mu$-presque tout $x$ et, comme $E$ est un Banach, elle converge donc pour $\mu$-presque tout $x$ vers $F(x)$, i.e.

$$\text{pour } \mu\text{-presque tout } x \in X\ ,\ \lim_{k\to\infty}\left(f_{n_1}(x) + \sum_{r=2}^{k}(f_{n_r}(x) - f_{n_{r-1}}(x))\right) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = F(x),$$

c'est à dire $f_{n_k} \to F$ $\mu$-presque partout.
Mais $||f_{n_k}|| = ||f_{n_1} + \sum_{r=2}^{k}(f_{n_r}(x) - f_{n_{r-1}})|| \leq ||f_{n_1}|| + \sum_{r=2}^{k} ||f_{n_r} - f_{n_{r-1}}|| \leq g \in L^p(X)$, donc par le théorème de convergence dominée, $f_{n_k} \to F$ dans $L^p(X;E)$, i.e. $F = f$ $\mu$-presque partout.
Soit $Y_k = \{x \in X \mid ||f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)|| \geq 1/(2^k)\}$: par Tchebychev, on a

$$\mu(Y_k) \leq 2^{pk}\int_X ||f_{n_k} - f_{n_{k-1}}||^p \leq \frac{1}{2^{pk}}.$$

Soit alors $Z_k = Y_k \cup Y_{k+1} \cup \ldots$: on a $\mu(Z_k) \leq \frac{1}{2^{pk}}\frac{1}{1-2^{-p}}$, donc il existe $k \geq 1$ tel que $\mu(Z_k) < \varepsilon$; posons alors $A_\varepsilon = Z_k$, et constatons que pour tout $r \geq k$, pour tout $x \notin A_\varepsilon$, $x \in Y_r^c$ donc $||f_{n_r}(x) - f_{n_{r-1}}(x)|| \leq 1/(2^r)$, ce qui signifie que la série $f_{n_1} + \sum_{r\geq 2}(f_{n_r} - f_{n_{r-1}})$ est absolument et uniformément convergente sur $A_\varepsilon^c$, c'est à dire que la convergence de $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ est uniforme sur $A_\varepsilon^c$. ■

Pour conclure ce chapitre, citons deux applications essentielles de la convergence dominée.

**Théorème 1.3.5** (Continuité sous l'intégrale) *Soit $T$ un espace métrique et $f : T \times X \to E$. Si:*
*i) Pour $\mu$-presque tout $x \in X$, $f(\cdot, x)$ est continue en $t_0 \in T$,*
*ii) Pour tout $t \in T$, $f(t, \cdot)$ est $\mu$-mesurable,*
*iii) Il existe $g \in L^1(X)$ telle que, pour tout $t \in T$ et pour $\mu$-presque tout $x \in X$, $||f(t,x)|| \leq g(x)$,*
*alors $F(t) = \int_X f(t,x)\,d\mu(x)$ est continue en $t_0$.*

Démonstration:
L'espace $T$ étant métrique, il suffit de montrer la continuité séquentielle de $F$. Soit donc une suite $(t_n)_{n\geq 1} \in T$ convergeant vers $t_0$; on voit que $F(t_n) = \int_X f_n\,d\mu$, où $f_n = f(t_n, \cdot)$ est $\mu$-mesurable, converge $\mu$-presque partout vers $f(t_0, \cdot)$ et est majorée $\mu$-presque partout par $g \in L^1(X)$ (le $\mu$-presque partout où la majoration a lieu dépend *a priori* de $t_n$, mais comme on travaille sur un nombre dénombrable de $t_n$, cela ne pose pas de problème): par le théorème de convergence dominée, $\int_X f_n\,d\mu \to \int_X f(t_0, \cdot)\,d\mu$, c'est à dire $F(t_n) \to F(t_0)$ et $F$ est bien continue en $t_0$. ■

**Théorème 1.3.6** (Dérivabilité sous l'intégrale) *Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times X \to E$. Si:*
*i) Pour tout $t \in I$, $f(t, \cdot)$ est $\mu$-mesurable,*
*ii) Il existe $t_0 \in I$ tel que $f(t_0, \cdot) \in L^1(X;E)$,*
*Il existe $A \subset X$ tel que $\mu(X \backslash A) = 0$ et:*
*iii) Pour tout $x \in A$, $f(\cdot, x)$ est dérivable sur $I$,*
*iv) Il existe $g \in L^1(X)$ telle que, $\forall t \in I$, $\forall x \in A$, $\left|\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right|\right| \leq g(x)$,*
*alors $F(t) = \int_X f(t,x)\,d\mu(x)$ est définie sur $I$, dérivable sur $I$ et on a*

$$F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,d\mu(x).$$

Démonstration:
Pour tout $x \in A$, le théorème des accroissements finis donne: $\forall (t,t') \in I^2$, $||f(t,x) - f(t',x)|| \leq |t - t'| \sup_{s\in[t,t']} ||\frac{\partial f}{\partial t}(s,x)|| \leq |t - t'| g(x)$, donc en prenant $t \in I$ et $t' = t_0$, on a $||f(t,x)|| \leq ||f(t_0,x)|| + |t - t_0| g(x) \in L^1(X)$, et ce pour tout $x \in A$; $A^c$ étant de mesure nulle, et $f(t,\cdot)$ étant $\mu$-mesurable, on en déduit que $f(t,\cdot) \in L^1(X;E)$ et que donc $F(t)$ est définie pour tout $t \in I$.

Soit $t_n \to t$; on a, puisque $\mu(A^c) = 0$,

$$\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int_X \frac{f(t_n, x) - f(t, x)}{t_n - t} \, d\mu(x) = \int_A \frac{f(t_n, x) - f(t, x)}{t_n - t} \, d\mu(x).$$

Or, pour tout $x \in A$, $\frac{f(t_n,x)-f(t,x)}{t_n-t} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$, et, par le théorème des accroissements finis,

$$\left|\left| \frac{f(t_n, x) - f(t, x)}{t_n - t} \right|\right| \leq g(x) \in L^1(X).$$

Le théorème de convergence dominée nous dit alors que

$$\int_A \frac{f(t_n, x) - f(t, x)}{t_n - t} \, d\mu(x) \to \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \, d\mu(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \, d\mu(x),$$

c'est à dire que $F$ est dérivable en $t$ et que $F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \, d\mu(x)$. ■

## 1.4 Dual Topologique de $L^p(X; E)$

Ici, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré $\sigma$-fini. L'exposant conjugué de $p \in [1, +\infty]$ est noté $p'$ $(= \frac{p}{p-1})$. Le dual topologique d'un espace de Banach $\mathcal{E}$ est noté $\mathcal{E}'$; si $|| \cdot ||_{\mathcal{E}}$ est la norme de $\mathcal{E}$, la norme duale sur $\mathcal{E}'$ est notée $|| \cdot ||_{\mathcal{E}'}$.
Dans ce qui suit, on expose les démonstrations en prenant $\mathbb{R}$ comme corps de base pour $E$, mais tout est valable dans le cas où le corps de base est $\mathbb{C}$.

Dans le cas où $E = \mathbb{R}$ (et $p < +\infty$) on sait identifier le dual de $L^p(X)$ avec $L^{p'}(X)$; précisément, l'application

$$T \left\{ \begin{array}{rcl} L^{p'}(X) & \longrightarrow & (L^p(X))' \\ g & \longrightarrow & T_g \text{ définie par } T_g(f) = \displaystyle\int_X g(x) f(x) \, d\mu(x) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme isométrique. Nous allons établir, moyennant des hypothèses sur $E$, un résultat similaire pour $L^p(X; E)$.

L'idée est bien sûr de remplacer le produit $g(x)f(x)$ dans $\mathbb{R}$ par le produit de dualité $\langle g(x), f(x) \rangle_{E',E}$, ce qui veut dire que $g$ doit être à valeurs dans $E'$.
Soit $g \in L^{p'}(X; E')$; on remarque que, si $f \in L^p(X; E)$, l'application $x \in X \to \langle g(x), f(x) \rangle_{E',E} \in \mathbb{R}$ est dans $L^1(X)$ (car $\langle ., . \rangle_{E',E} : E' \times E \to \mathbb{R}$ est bilinéaire continue — cf remarques suivant la définition des espaces $L^p$); on constate de plus, en utilisant l'inégalité de Hölder, que

$$\left| \int_X \langle g(x), f(x) \rangle_{E',E} \, d\mu(x) \right| \leq ||g||_{L^{p'}(X;E')} ||f||_{L^p(X;E)}. \tag{1.4.1}$$

Ainsi, l'application

$$T \left\{ \begin{array}{rcl} L^{p'}(X; E') & \longrightarrow & (L^p(X; E))' \\ g & \longrightarrow & T_g \text{ définie par } T_g(f) = \displaystyle\int_X \langle g(x), f(x) \rangle_{E',E} \, d\mu(x) \end{array} \right.$$

est linéaire continue de norme inférieure à 1 (car (1.4.1) nous dit que $||T_g||_{(L^p(X;E))'} \leq ||g||_{L^{p'}(X;E')}$). Le problème est donc de savoir si cette application est une isométrie et si elle est bijective.

**Lemme 1.4.1** *Si $E$ est un espace normé de dimension finie et $p < +\infty$, alors $T$ définie ci-dessus est un isomorphisme isométrique.*

Remarque:

> Bien sûr, $E$ étant muni d'une norme $|| \cdot ||_E$, on munit toujours $E'$ de la norme duale $|| \cdot ||_{E'}$ associée et $L^p(X; E)$, $L^{p'}(X; E')$ des normes correspondantes.

DÉMONSTRATION:
$\diamondsuit$ Etape 1: Nous montrons d'abord que $T$ est une isométrie (ce qui nous donnera l'injectivité). Soit donc $g \in L^{p'}(X; E')$ et $f : X \to E$ une fonction mesurable (donc $\mu$-mesurable puisque $E$ est de dimension finie) telle que, pour tout $x \in X$, $||f(x)||_E = 1$ et $\langle g(x), f(x)\rangle_{E',E} = ||g(x)||_{E'}$ (une telle fonction existe, cf Annexe A).
Si $p' = +\infty$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \subset X$ mesurable de mesure non nulle tel que $\forall x \in A$, $||g(x)||_{E'} \geq ||g||_{L^\infty(X;E')} - \varepsilon$. Comme $X$ est de mesure $\sigma$-finie, il existe $B \subset A$ tel que $0 < \mu(B) < +\infty$ (il suffit d'écrire $X$ comme réunion croissante d'ensembles $X_n$ de mesures finies, de constater que $\mu(A \cap X_n) \to \mu(A) \neq 0$, et de prendre $B = A \cap X_n$ pour $n \geq 1$ tel que $\mu(A \cap X_n) \neq 0$). En prenant alors $\widetilde{f} = f\mathbf{1}_B \in L^1(X; E)$, on voit que

$$||\widetilde{f}||_{L^1(X;E)} = \mu(B)$$

et

$$T_g(\widetilde{f}) = \int_B \langle g(x), f(x)\rangle_{E',E}\, d\mu(x) \geq \mu(B)(||g||_{L^\infty(X;E')} - \varepsilon).$$

On en déduit $||g||_{L^\infty(X;E')} - \varepsilon \leq ||T_g||_{(L^1(X;E))'}$, et ce pour tout $\varepsilon > 0$, donc $||g||_{L^\infty(X;E')} \leq ||T_g||_{(L^1(X;E))'}$. Comme on avait déjà l'inégalité inverse, on obtient l'égalité et le caractère isométrique de $T$.
Si $p' < +\infty$, on pose $\widetilde{f}(x) = ||g(x)||_{E'}^{p'-1} f(x)$: $\widetilde{f}$ est $\mu$-mesurable (car $||g(\cdot)||_{E'}^{p'-1} : X \to \mathbb{R}$ et $f(\cdot) : X \to E$ sont $\mu$-mesurables) et vérifie $||\widetilde{f}(x)||_E^p = ||g(x)||_{E'}^{p(p'-1)} = ||g(x)||_{E'}^{p'}$, donc $\widetilde{f} \in L^p(X; E)$ et

$$||\widetilde{f}||_{L^p(X;E)} = ||g||_{L^{p'}(X;E')}^{p'/p}.$$

De plus,

$$T_g(f) = \int_X ||g(x)||_{E'}^{p'-1} ||g(x)||_{E'}\, d\mu(x) = ||g||_{L^{p'}(X;E')}^{p'}.$$

On en déduit alors $||g||_{L^{p'}(X;E')}^{p'} \leq ||T_g||_{(L^p(X;E))'} ||g||_{L^{p'}(X;E')}^{p'/p}$, soit, puisque $p' - p'/p = p'(1 - 1/p) = 1$, $||g||_{L^{p'}(X;E')} \leq ||T_g||_{(L^p(X;E))'}$; comme on avait déjà l'inégalité inverse, on obtient l'égalité et le caractère isométrique de $T$.
$\diamondsuit$ Etape 2: Il ne reste plus que la surjectivité de $T$ à montrer. Choisissons une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $E$ et prenons $G \in (L^p(X; E))'$. En écrivant, pour $f \in L^p(X; E)$, $f = f_1 e_1 + \cdots + f_n e_n$, on constate que $G(f) = G(f_1 e_1) + \cdots + G(f_n e_n) = H_1(f_1) + \cdots + H_n(f_n)$, où $H_i$ est l'élement de $(L^p(X))'$ définit par $H_i(h) = G(he_i)$. On sait alors qu'il existe $g_i \in L^{p'}(X)$ tel que pour tout $h \in L^p(X)$, $H_i(h) = \int_X g_i h\, d\mu$. On en conclut que $G(f) = \int_X f_1 g_1\, d\mu + \cdots + \int_X f_n g_n\, d\mu$; en posant, pour $x \in X$, $g(x) \in E'$ définie par $\langle g(x), a\rangle_{E',E} = g_1(x)a_1 + \cdots + g_n(x)a_n$, on a $g \in L^{p'}(X; E')$ (pour s'en convaincre, on peut prendre sur $E'$ la norme de la somme des valeurs absolues des composantes sur la base duale de $(e_1, \ldots, e_n)$ puisque, sur $E'$ de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes; on constate que pour cette norme $N$, $N(g(x)) = |g_1(x)| + \cdots + |g_n(x)|$) et on voit que $G(f) = \int_X \langle g(x), f(x)\rangle_{E',E}\, d\mu$, c'est à dire que $G = T_g$. ∎

**Théorème 1.4.1** *Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré $\sigma$-fini, $1 \leq p < +\infty$ et $E$ est un espace de Banach dont le dual $E'$ est séparable, alors l'application*

$$T \left\{ \begin{array}{ccl} L^{p'}(X; E') & \longrightarrow & (L^p(X; E))' \\ g & \longrightarrow & T_g \text{ définie par } T_g(f) = \int_X \langle g(x), f(x)\rangle_{E',E}\, d\mu(x) \end{array} \right.$$

*est un isomorphisme isométrique.*

Remarque:

> L'hypothèse sur $E'$ ne semble pas "trop forte"; en effet, comme on le verra plus loin, il existe des espaces $X$ et $Y$ tels que $L^1(X; L^1(Y)) = L^1(X \times Y)$ mais $L^\infty(X; L^\infty(Y)) \neq L^\infty(X \times Y)$, donc, puisque $(L^1(X \times Y))' = L^\infty(X \times Y)$ (car, ici, $E = \mathbb{R}$), on ne peut avoir $(L^1(X; L^1(Y)))' = L^\infty(X; L^\infty(Y))$.

Démonstration:
On commence par constater que $E$ est séparable (cf annexe B.1); on peut donc écrire $E = \overline{\bigcup_{n\geq 1} E_n}$, avec $E_n \subset E_{n+1}$ et $E_n$ de dimension finie; on munit $E_n$ de la norme induite par celle de $E$.
$\diamondsuit$ Etape 1: On montre que $T : L^{p'}(X; E') \to (L^p(X; E))'$ est injective.
Pour cela, on prend $g \in L^{p'}(X; E')$ telle que $T_g = 0$; cela signifie donc que, pour tout $a \in E$ et tout $A$ mesurable de mesure finie, puisque $a\mathbf{1}_A \in L^p(X; E)$, $T_g(a\mathbf{1}_A) = \int_A \langle g(x), a\rangle \, d\mu = 0$. Ceci étant vrai pour tout ensemble $A$ mesurable de mesure finie, et $X$ étant $\sigma$-fini, on en déduit que pour tout $a \in E$, $\langle g(x), a\rangle = 0$ $\mu$-presque partout, c'est à dire partout sauf sur $A_a$ mesurable de mesure nulle. Comme $E$ est séparable, en prenant $\{a_n\, ,\ n \geq 1\}$ dénombrable dense dans $E$ et en notant $B = \bigcup_{n\geq 1} A_{a_n}$ (de mesure nulle), on en déduit que pour tout $n \geq 1$, $\langle g(x), a_n\rangle = 0$ sauf sur $B$; comme $g(x) : E \to \mathbb{R}$ est continue et $\{a_n\, ,\ n \geq 1\}$ est dense dans $E$, on en déduit que si $x \notin B$, $g(x) = 0$, c'est à dire que $g = 0$ $\mu$-presque partout, donc $g = 0$ dans $L^{p'}(X; E')$.

Pour montrer à la fois la surjectivité de $T$ et son caractère isométrique, prenons $G \in (L^p(X; E))'$ quelconque.
$\diamondsuit$ Etape 2: Soit $n \geq 1$. L'application $G_n : L^p(X; E_n) \to \mathbb{R}$ obtenue par restriction de $G$ (i.e. $\forall f \in L^p(X; E_n) \hookrightarrow L^p(X; E)$, $G_n(f) = G(f)$) est linéaire continue (de norme inférieure à $||G||_{(L^p(X;E))'}$); donc, par le lemme précédent, il existe un unique $g_n \in L^{p'}(X; E_n')$ de norme égale à $||G_n||_{(L^p(X;E_n))'}$ telle que, pour tout $f \in L^p(X; E_n)$,

$$G(f) = G_n(f) = \int_X \langle g_n(x), f(x)\rangle_{E_n', E_n} \, d\mu(x).$$

Soit $m \geq n$: on remarque que, si l'on pose $g_{m\,|E_n} : X \to E_n'$ définie par

$$\langle g_{m\,|E_n}(x), a\rangle_{E_n', E_n} = \langle g_m(x), a\rangle_{E_m', E_m}$$

et si $f \in L^p(X; E_n) \subset L^p(X; E_m)$, on a

$$G(f) = G_n(f) = \int_X \langle g_n(x), f(x)\rangle_{E_n', E_n} \, d\mu(x) = G_m(f) = \int_X \langle g_m(x), f(x)\rangle_{E_m', E_m} \, d\mu(x),$$

soit, en utilisant la partie unicité du lemme de la dimension finie, $g_{m\,|E_n} = g_n$ (car $g_n \in L^{p'}(X; E_n')$ et $g_{m\,|E_n} \in L^{p'}(X; E_n')$ — on a $||g_{m\,|E_n}||_{E_n'} \leq ||g_m||_{E_m'}$). On tire de cette égalité deux faits qui nous serviront dans la suite:

- $(||g_n(x)||_{E_n'})_{n\geq 1}$ est une suite croissante, car si $n \leq m$,
$$||g_n(x)||_{E_n'} = ||g_{m\,|E_n}(x)||_{E_n'} \leq ||g_m(x)||_{E_m'},$$
- On peut définir $g(x) : \bigcup_{n\geq 1} E_n \to \mathbb{R}$ linéaire par: $\forall n \geq 1$, $\forall a \in E_n$, $\langle g(x), a\rangle = \langle g_n(x), a\rangle_{E_n', E_n}$.

$\diamondsuit$ Etape 3: On montre que, pour $\mu$-presque tout $x$, $g(x) : \bigcup E_n \to \mathbb{R}$ est continue (ce qui permettra de l'étendre, de manière unique, en une application $g(x) \in E'$).
Pour cela, on constate que $g(x)_{|E_n} = g_n(x) : E_n \to \mathbb{R}$ est continue ($E_n$ est de dimension finie); de plus, $\sup_{n\geq 1} ||g(x)_{|E_n}||_{E_n'} = \sup_{n\geq 1} ||g_n(x)||_{E_n'}$ est mesurable (sup dénombrable de fonctions mesurables, puisque $g_n : X \to E_n'$ est mesurable) et vérifie $\sup_{n\geq 1} ||g(x)_{|E_n}||_{E_n'} = \lim_{n\to\infty} ||g_n(x)||_{E_n'}$ (la suite $(||g_n(x)||_{E_n'})_{n\geq 1}$ est croissante). Il faut ensuite distinguer les cas $p' < +\infty$ et $p' = +\infty$.
Si $p' = +\infty$, on sait que $||g_n||_{L^\infty(X;E_n')} = ||G_n||_{(L^1(X;E_n))'} \leq ||G||_{(L^1(X;E))'}$, donc pour $\mu$-presque tout $x \in X$,

$$\sup_{n\geq 1} ||g(x)_{|E_n}||_{E_n'} \leq ||G||_{(L^1(X;E))'} < +\infty. \tag{1.4.2}$$

Si $p' < +\infty$, alors par intégration de $\sup_{n\geq 1} ||g(x)_{|E_n}||^{p'}_{E_n'} = \lim_{n\to\infty} ||g_n(x)||^{p'}_{E_n'}$ et en utilisant le lemme de Fatou, on a

$$\begin{aligned} \int_X \sup_{n\geq 1} ||g(x)_{|E_n}||^{p'}_{E_n'} \, d\mu(x) &= \int_X \lim_{n\to\infty} ||g_n(x)||^{p'}_{E_n'} \, d\mu(x) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} ||g_n||^{p'}_{L^{p'}(X;E_n')} \\ &\leq ||G||^{p'}_{(L^p(X;E))'} < +\infty, \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

donc $\sup_{n\geq 1}||g(x)_{|E_n}||_{E'_n}$ est fini pour $\mu$-presque tout $x$.
Dans chaque cas, on a donc $C_x = \sup_{n\geq 1}||g(x)_{|E_n}||_{E'_n} < +\infty$ $\mu$-presque partout, et cela nous permet de déduire que $g(x) : \bigcup_{n\geq 1} E_n \to \mathbb{R}$ est continue; en effet, pour tout $a \in \bigcup_{n\geq 1} E_n$, il existe $k \geq 1$ tel que $a \in E_k$, donc $|\langle g(x), a\rangle_{E',E}| = |\langle g(x)_{|E_k}, a\rangle_{E'_k,E_k}| \leq C_x||a||$. Par densité de $\bigcup_{n\geq 1} E_n$ dans $E$, on peut étendre $g(x)$ en une forme linéaire continue sur $E$ dont la norme est inférieure à $C_x$; comme $C_x = \sup_{n\geq 1}||g(x)_{|E_n}||_{E'_n} \leq ||g(x)||_{E'}$, on obtient en fait $||g(x)||_{E'} = \sup_{n\geq 1}||g(x)_{|E_n}||_{E'_n}$. Les inégalités (1.4.2) et (1.4.3) nous permettent donc de tirer

$$||g(x)||_{E'} \leq ||G||_{(L^1(X;E))'} \text{ pour } \mu\text{-presque tout } x \tag{1.4.4}$$

lorsque $p' = +\infty$, et

$$\left(\int_X ||g(x)||_{E'}^{p'}\, d\mu(x)\right)^{1/p'} \leq ||G||_{(L^p(X;E))'} < +\infty \tag{1.4.5}$$

lorsque $p' < +\infty$.
♢ Etape 4: On montre que $g : X \to E'$ est $\mu$-mesurable.
Pour cela, puisque $E'$ est séparable et $X$ est de mesure $\sigma$-finie, il suffit de constater que pour tout $l \in E'$, $x \to ||g(x) - l||_{E'}$ est mesurable.
Or, si $\{a_k\ ,\ k \geq 1\}$ est dénombrable dense dans $\{a \in \bigcup_{n\geq 1} E_n\ ,\ ||a|| = 1\}$, comme $g(x)$ et $l$ sont continues, $||g(x) - l||_{E'} = \sup_{k\geq 1}|\langle g(x) - l, a_k\rangle_{E',E}|$; mais $|\langle g(x) - l, a_k\rangle_{E',E}| = |\langle g_r(x) - l_{|E'_r}, a_k\rangle_{E'_r,E_r}|$ pour $r \geq 1$ tel que $a_k \in E_r$, donc comme $g_r : X \to E'_r$ est mesurable, $x \to |\langle g(x) - l_{|E'_r}, a_k\rangle_{E',E}|$ est mesurable et $x \to ||g(x) - l||_{E'}$ est mesurable en tant que borne supérieure d'un ensemble dénombrable de fonctions mesurables.
On remarque de plus, en prenant $l = 0$ et en constatant que $|\langle g_r(x), a_k\rangle_{E'_k,E_k}| \leq ||g_r(x)||_{E'_r}$, que $||g(x)||_{E'} = \sup_{k\geq 1}|\langle g(x), a_k\rangle_{E',E}| \leq \lim_{n\to\infty}||g_n(x)||_{E'_n}$ (cette suite est croissante).
♢ Etape 5: $g : X \to E'$ est $\mu$-mesurable et, par (1.4.4) et (1.4.5), $g$ est donc dans $L^{p'}(X;E')$ avec $||g||_{L^{p'}(X;E')} \leq ||G||_{(L^p(X;E))'}$.
♢ Etape 6: On montre que $T_g = G$ et que $T$ est une isométrie.
On sait déjà que $T_g : L^p(X;E) \to \mathbb{R}$ est continue, tout comme $G$; de plus, pour tout $a \in \bigcup_{n\geq 1} E_n$, pour tout $A \subset X$ mesurable de mesure finie, en prenant $k \geq 1$ tel que $a \in E_k$, puisque $a\mathbf{1}_A \in L^p(X;E_k)$, on a

$$\begin{aligned} G(a\mathbf{1}_A) = G_k(a\mathbf{1}_A) &= \int_X \langle g_k(x), a\rangle_{E'_k,E_k}\mathbf{1}_A(x)\, d\mu(x) \\ &= \int_X \langle g(x), a\rangle_{E',E}\mathbf{1}_A(x)\, d\mu(x) = T_g(a\mathbf{1}_A). \end{aligned}$$

Cette égalité passe, par linéarité, aux sommes finies d'élements de la forme $a\mathbf{1}_A$; mais il est facile de voir, puisque $\bigcup_{n\geq 1} E_n$ est dense dans $E$, que toute fonction simple $X \to E$ est limite, dans $L^p(X;E)$, de telles sommes finies (il suffit d'approcher $e \in E$ par $a_r \in \bigcup_{n\geq 1} E_n$ pour approcher $e\mathbf{1}_A$ par $a_r\mathbf{1}_A$ dans $L^p(X;E)$). Ainsi, puisque $S(X;E)$ est dense dans $L^p(X;E)$ ($p$ est fini), les deux fonctions continues $G$ et $T_g$ coïncident sur un ensemble dense dans $L^p(X;E)$ et sont donc égales; on a montré la surjectivité de $T$.
On sait alors que $||G||_{(L^p(X;E))'} = ||T_g||_{(L^p(X;E))'} \leq ||g||_{L^{p'}(X;E')}$, mais on avait déjà l'inégalité inverse dans l'étape 5, ce qui montre que $||G||_{(L^p(X;E))'} = ||g||_{L^{p'}(X;E')}$, c'est à dire que $T$ est une isométrie. ■

**Corollaire 1.4.1** *Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré $\sigma$-fini, $1 < p < +\infty$ et $E$ est un espace de Banach séparable réflexif, alors $L^p(X;E)$ est réflexif.*

Démonstration:
Notons

$$J \left\{ \begin{array}{l} L^p(X;E) \longrightarrow (L^p(X;E))'' \\ f \longrightarrow J(f) \text{ définie par } \langle J(f), H\rangle_{(L^p(X;E))'',(L^p(X;E))'} = \langle H, f\rangle_{(L^p(X;E))',L^p(X;E)}. \end{array} \right.$$

Il faut montrer que $J$ est un isomorphisme isométrique. On note $j : E \to E''$ l'isomorphisme isométrique correspondant pour $E$ réflexif, et on remarque que $j$ induit un isomorphisme isométrique, encore noté $j$, entre $L^p(X;E)$ et $L^p(X;E'')$.
On introduit ensuite l'application $T : L^{p'}(X;E') \to (L^p(X;E))'$ définie dans le théorème précédent et $T' : L^p(X;E'') = L^{(p')'}(X;(E')') \to (L^{p'}(X;E'))'$ son analogue avec $p$ remplacé par $p'$ et $E$ par $E'$;

comme $(p,p') \in ]1,+\infty[$ et $E', (E')' = E'' = j(E)$ sont séparables, on sait par le théorème précédent que $T$ et $T'$ sont des isomorphismes isométriques.
Pour tout $H \in (L^p(X;E))'$, il existe un unique $g = T^{-1}(H) \in L^{p'}(X;E')$ tel que $H = T(g)$; donc, pour tout $f \in L^p(X;E)$,

$$\langle J(f), H\rangle_{(L^p(X;E))'',(L^p(X;E))'} = \langle T(g), f\rangle_{(L^p(X;E))',L^p(X;E)} = \int_X \langle g(x), f(x)\rangle_{E',E}\, d\mu(x).$$

Mais, par définition de $j : L^p(X;E) \to L^p(X;E'')$, on a $\langle g(x), f(x)\rangle_{E',E} = \langle j(f)(x), g(x)\rangle_{E'',E'}$ pour tout $x \in X$; de plus, par définition de $T'$,

$$\begin{aligned}\langle T'(j(f)), T^{-1}(H)\rangle_{(L^{p'}(X;E'))',L^{p'}(X;E')} &= \int_X \langle j(f)(x), g(x)\rangle_{E'',E'}\, d\mu(x)\\ &= \langle J(f), H\rangle_{(L^p(X;E))'',(L^p(X;E))'},\end{aligned}$$

c'est à dire, en notant $(T^{-1})^* : (L^{p'}(X;E'))' \to ((L^p(X;E))')'$ la transposée de $T^{-1}$, qui est aussi un isomorphisme isométrique (cf Annexe B.2), on a $J = (T^{-1})^* \circ T' \circ j$. Comme ces applications sont des isomorphismes isométriques, $J$ est bien un isomorphisme isométrique. ■

## 1.5 Le Théorème de Fubini

Dans cette partie, $E$ est toujours un espace de Banach et $(X,\mathcal{A},\mu)$, $(Y,\mathcal{B},\nu)$ sont deux espaces mesurés $\sigma$-finis. On munit leur produit $X \times Y$ de la $\sigma$-algèbre produit, i.e. $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ engendrée par $\{A \times B\,,\ A \in \mathcal{A}\,,\ B \in \mathcal{B}\}$, et de la mesure produit (complétée) $(\mu\otimes\nu)$.
Pour $f : X \times Y \to E$, on note $f_x : Y \to E$ la fonction $f_x(y) = f(x,y)$ et $f^y : X \to E$ la fonction $f^y(x) = f(x,y)$.

Commençons par rappeler le théorème de Fubini-Tonelli.

**Théorème 1.5.1** (Fubini-Tonelli) *Soient $(X,\mathcal{A},\mu)$ et $(Y,\mathcal{B},\nu)$ des espaces mesurés $\sigma$-finis. Si $f : X \times Y \to [0,+\infty]$ est mesurable pour $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, alors:*
*i) Pour $\mu$-presque tout $x$, $f_x : Y \to [0,+\infty]$ est mesurable et, pour $\nu$-presque tout $y$, $f^y : X \to [0,+\infty]$ est mesurable,*
*ii) $x \to \int_Y f_x\, d\nu$ et $y \to \int_X f^y\, d\mu$ sont mesurables,*
*iii) $\int_{X\times Y} f\, d(\mu\otimes\nu) = \int_X \left(\int_Y f_x\, d\nu\right)\, d\mu = \int_Y \left(\int_X f^y\, d\mu\right)\, d\nu$.*

Et une application qui nous sera utile par la suite.

**Lemme 1.5.1** *Soit $\mathcal{P}(x,y)$ une propriété dépendant d'un couple $(x,y) \in X\times Y$; on suppose que $\{(x,y) \in X\times Y \mid \mathcal{P}(x,y)$ est vraie$\}$ est mesurable dans $X\times Y$. Alors $\mathcal{P}$ est vraie $(\mu\otimes\nu)$-presque partout sur $X\times Y$ si et seulement si pour $\mu$-presque tout $x$, $\mathcal{P}(x,\cdot)$ est vraie $\nu$-presque partout sur $Y$.*

Remarque:

Si $f_n : X \times Y \to E$ est une suite de fonctions mesurables sur $X \times Y$ et $\mathcal{P}(x,y) =$"$f_n(x,y)$ converge lorsque $n \to \infty$", alors, par le critère de Cauchy,

$$\{(x,y) \mid \mathcal{P}(x,y) \text{ est vraie}\} = \bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{N\geq 1}\bigcap_{n,m\geq N}\left\{(x,y) \mid ||f_n(x,y) - f_m(x,y)|| \leq \frac{1}{k}\right\}$$

et $\{(x,y) \in X \times Y \mid \mathcal{P}(x,y)$ est vraie$\}$ est donc mesurable. C'est le principal cas où nous utiliserons ce lemme.

Démonstration:
Pour le sens direct, on note $A \subset X\times Y$ de $(\mu\otimes\nu)$-mesure nulle tel que $\mathcal{P}(x,y)$ est vraie pour tout $(x,y) \notin A$. Alors, à $x$ fixé, $\mathcal{P}(x,y)$ est vraie pour tout $y \notin A_x$, où $A_x = \{y \in Y \mid (x,y) \in A\} \subset Y$ est mesurable pour $\mu$-presque tout $x$ (theorème de Fubini-Tonelli); on a aussi $0 = (\mu\otimes\nu)(A) = \int_X \nu(A_x)\, d\mu(x)$, donc pour $\mu$-presque tout $x \in X$, $\nu(A_x) = 0$ et ce sens du lemme est démontré.

Pour le sens réciproque: soit $C(x) = \{y \in Y \mid \mathcal{P}(x,y) \text{ est fausse }\}$; par hypothèse, il existe $B \subset X$ de mesure nulle tel que, si $x \notin B$, $\nu(C(x)) = 0$. Soit $A = \{(x,y) \in X \times Y \mid \mathcal{P}(x,y) \text{ est fausse }\}$; on a, grâce à Fubini-Tonelli, $(\mu \otimes \nu)(A) = \int_X \nu(A_x)\,d\mu(x) = \int_B \nu(A_x)\,d\mu(x) + \int_{B^c} \nu(A_x)\,d\mu(x)$, où $A_x$ est défini comme précédemment. Or, $\mu(B) = 0$, donc $(\mu \otimes \nu)(A) = \int_{B^c} \nu(A_x)\,d\mu(x)$ et, pour $x \in B^c$, $A_x = \{y \in Y \mid (x,y) \in A\} = \{y \in Y \mid \mathcal{P}(x,y) \text{ est fausse }\} = C(x)$, ensemble de $\nu$-mesure nulle, donc $(\mu \otimes \nu)(A) = 0$. ∎

**Théorème 1.5.2** (Fubini vectoriel) *Soient $E$ un espace de Banach et $(X,\mathcal{A},\mu)$, $(Y,\mathcal{B},\nu)$ deux espaces mesurés $\sigma$-finis. Si $f \in L^1(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu; E)$, alors:*

*i) Pour $\mu$-presque tout $x \in X$, $f_x \in L^1(Y,\mathcal{B},\nu;E)$ et pour $\nu$-presque tout $y$, $f^y \in L^1(X,\mathcal{A},\mu;E)$,*

*ii) $x \to \int_Y f_x\,d\nu$ est dans $L^1(X,\mathcal{A},\mu;E)$ et $y \to \int_X f^y\,d\mu$ est dans $L^1(Y,\mathcal{B},\nu;E)$,*

*iii) On a*

$$\int_{X\times Y} f\,d(\mu\otimes\nu) = \int_X \left(\int_Y f_x\,d\nu\right) d\mu = \int_Y \left(\int_X f^y\,d\mu\right) d\nu.$$

Remarque:

> Rappelons que $f \in L^1(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu; E)$ signifie que $f$ est $(\mu \otimes \nu)$-mesurable et intégrable pour $\mu \otimes \nu$.

Démonstration:

◇ Etape 1: $\mu$-mesurabilité de $f_x$.

Comme $f$ est $(\mu\otimes\nu)$-mesurable, il existe une suite $(S_n)_{n\geq 1} \in S(X \times Y; E)$ qui converge $(\mu\otimes\nu)$-presque partout. Par le lemme 1.5.1, on en déduit que, pour $\mu$-presque tout $x \in X$, $((S_n)_x)_{n\geq 1}$ converge vers $f_x$ $\nu$-presque partout sur $Y$.

Pour conclure cette étape, il suffit donc de voir que pour toute fonction simple $S : X\times Y \to E$, la fonction $S_x : Y \to E$ est $\nu$-mesurable; vu la définition d'une fonction simple sur $X \times Y$, il suffit de voir que pour tout $a \in E$ et tout $C \subset X \times Y$ de mesure finie, l'application $y \in Y \to a(\mathbf{1}_C)_x(y) \in E$ est $\nu$-mesurable pour $\mu$-presque tout $x \in X$.

Mais, par Fubini-Tonelli, $y \in Y \to (\mathbf{1}_C)_x(y) \in \mathbb{R}^+$ est mesurable pour $\mu$-presque tout $x$, donc limite simple $\nu$-presque partout de fonctions simples $Y \to \mathbb{R}^+$; on constate alors aisément que $y \in Y \to a(\mathbf{1}_C)_x(y) \in E$ est, pour $\mu$-presque tout $x \in X$, limite simple $\nu$-presque partout de fonctions simples $Y \to E$, i.e. est $\nu$-mesurable.

◇ Etape 2: intégrabilité de $f_x$.

On sait, par Fubini-Tonelli et puisque $||f|| \in L^1(X \times Y)$, que

$$\int_X \left(\int_Y ||f_x||\,d\nu\right) d\mu = \int_{X\times Y} ||f||\,d(\mu\otimes\nu) < +\infty,$$

donc, pour $\mu$-presque tout $x \in X$, $\int_Y ||f_x||\,d\nu$ est finie, c'est à dire, grâce à l'étape 1, $f_x \in L^1(Y;E)$ pour $\mu$-presque tout $x \in X$.

Il est bien évident que les deux étapes précédentes peuvent être effectuées avec $f^y$ à la place de $f_x$, et l'on a donc prouvé les résultats anoncés dans i).

◇ Etape 3: $I : x \to \int_Y f_x\,d\nu$ est dans $L^1(X;E)$.

$f \in L^1(X \times Y; E)$, donc en prenant une suite de fonctions $(S_n)_{n\geq 1} \in S(X \times Y; E)$ approximante pour $f$, on constate par Fubini-Tonelli que

$$\int_X \left(\int_Y ||f_x - (S_n)_x||\,d\nu\right) d\mu = \int_{X\times Y} ||f - S_n||\,d(\mu\otimes\nu) \to 0,$$

c'est à dire, en posant $\alpha_n : x \to \int_Y ||f_x - (S_n)_x||\,d\nu$, $\alpha_n \to 0$ dans $L^1(X)$; quitte à extraire une suite, on peut donc supposer que $\alpha_n \to 0$ presque partout sur $X$, ce qui implique $\int_Y (S_n)_x\,d\nu \to \int_Y f_x\,d\nu = I(x)$ pour $\mu$-presque tout $x \in X$ ($(S_n)_x$ est intégrable sur $Y$ par l'étape 2, puisque $S_n \in L^1(X \times Y; E)$).

Or il n'est pas dur de voir que pour toute fonction $S \in S(X \times Y; E)$, $x \in X \to \int_Y S_x\,d\nu \in E$ est $\mu$-mesurable. En effet, pour tout $C \subset X\times Y$ de mesure finie, $x \in X \to \int_Y (\mathbf{1}_C)_x\,d\nu \in \mathbb{R}^+$ est mesurable par Fubini-Tonelli, donc limite simple de fonctions simples (à valeurs réelles); en écrivant ensuite $S$ comme somme finie de telles fonctions $\mathbf{1}_C$ multipliées par des éléments de $E$, on voit que $x \to \int_Y S_x\,d\nu$ est limite simple de fonctions simples à valeurs dans $E$, i.e. est $\mu$-mesurable.

$I$ est donc $\mu$-mesurable en tant que limite simple $\mu$-presque partout de fonctions $\mu$-mesurables et, par Fubini-Tonelli:

$$\int_X \left|\left|\int_Y f_x \, d\nu\right|\right| \, d\mu \leq \int_X \left(\int_Y ||f_x|| \, d\nu\right) \, d\mu = \int_{X\times Y} ||f|| \, d(\mu \otimes \nu) < +\infty,$$

ce qui nous permet de conclure quant à l'intégrabilité de $I : X \to E$.
De même, on voit que $y \to \int_X f^y \, d\mu$ est dans $L^1(Y; E)$.
♢ Etape 4: Conclusion de la démonstration.
Soit $T \in E'$: comme $f \in L^1(X \times Y; E)$, on a $T(f) \in L^1(X \times Y)$ et

$$T\left(\int_{X\times Y} f \, d(\mu \otimes \nu)\right) = \int_{X\times Y} T(f) \, d(\mu \otimes \nu).$$

En appliquant le théorème de Fubini dans sa version à valeurs réelles, on a donc

$$T\left(\int_{X\times Y} f \, d(\mu \otimes \nu)\right) = \int_X \left(\int_Y T(f_x) \, d\nu\right) \, d\mu.$$

Or $f_x \in L^1(Y; E)$, donc $\int_Y T(f_x) \, d\nu = T\left(\int_Y f_x \, d\nu\right)$, et, l'application $x \to \int_Y f_x \, d\nu$ étant dans $L^1(X; E)$, on a aussi $\int_X T\left(\int_Y f_x \, d\nu\right) \, d\mu = T\left(\int_X \left(\int_Y f_x \, d\nu\right) \, d\mu\right)$. Toutes ces égalités donnent finalement

$$T\left(\int_{X\times Y} f \, d(\mu \otimes \nu)\right) = T\left(\int_X \left(\int_Y f_x \, d\nu\right) \, d\mu\right).$$

Ceci étant vrai pour tout $T \in E'$, et comme $E'$ sépare $E$ (i.e. si $T(a) = T(b)$ pour tout $T \in E'$, alors $a = b$), on en déduit l'égalité de iii). ■

## 1.6 Le Théorème de Changement de Variable

Dans cette partie, $U$ et $V$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^N$, $\mu$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$ et le déterminant jacobien d'une fonction $\varphi : U \to V$ est noté $J\varphi$.

**Théorème 1.6.1** (Changement de Variable Lipschitzien) *Si $\varphi : U \to V$ est un homéomorphisme localement lipschitzien et $f \in L^1(V; E)$ alors $f \circ \varphi|J\varphi| \in L^1(U; E)$ et on a*

$$\int_V f \, d\mu = \int_U f \circ \varphi|J\varphi| \, d\mu.$$

Démonstration:
Comme d'habitude, montrer la $\mu$-mesurabilité de $f \circ \varphi|J\varphi|$ va être la partie délicate (Etape 1), la relation du changement de variable proprement dit se déduisant du cas réel comme pour Fubini (Etape 2).
♢ Etape 1: Le théorème de changement de variable lipschitzien dans le cas réel nous permet de voir que $||f|| \circ \varphi|J\varphi| = ||f \circ \varphi|J\varphi||$ est dans $L^1(U)$.
Soit $(s_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions simples qui converge $\mu$-presque partout sur $V$ vers $f$. Si $A = \{x \in V \mid s_n(x) \not\to f(x)\}$, $A$ est de mesure nulle et $s_n \circ \varphi|J\varphi| \to f \circ \varphi|J\varphi|$ sauf sur $B = \varphi^{-1}(A) \cap \{x \in U \mid J\varphi(x) \neq 0\}$; en définissant $g : V \to \mathbb{R}^+$ par

$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{|J\varphi| \circ \varphi^{-1}(x)} \text{ si } |J\varphi| \circ \varphi^{-1}(x) \neq 0, \\ g(x) = 0 \text{ si } |J\varphi| \circ \varphi^{-1}(x) = 0, \end{cases}$$

on constate que $\mathbf{1}_{\{J\varphi\neq 0\}} = g \circ \varphi|J\varphi|$ sur $U$, donc, par le théorème de changement de variable lipschitzien réel, on a

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \int_U \mathbf{1}_{\varphi^{-1}(A)} \times \mathbf{1}_{\{J\varphi\neq 0\}} \, d\mu \\ &= \int_U (\mathbf{1}_A \times g) \circ \varphi|J\varphi| \, d\mu \\ &= \int_V \mathbf{1}_A \times g \, d\mu \\ &= \int_A g \, d\mu = 0 \end{aligned}$$

puisque $A$ est de mesure nulle.
Ainsi $s_n \circ \varphi|J\varphi| \to f \circ \varphi|J\varphi|$ $\mu$-presque partout sur $U$ et il suffit donc de montrer que $s_n \circ \varphi|J\varphi|$ est $\mu$-mesurable ($f \circ \varphi|J\varphi|$ sera alors $\mu$-mesurable en tant que limite simple $\mu$-presque partout de fonctions $\mu$-mesurables).
Vu la structure des fonctions simples sur $V$, on est ramené à montrer que, pour tout $A \subset V$ de mesure finie, $\mathbf{1}_A \circ \varphi|J\varphi| = \mathbf{1}_{\varphi^{-1}(A)}|J\varphi| : U \to \mathbb{R}$ est $\mu$-mesurable; mais cette fonction $\mathbf{1}_{\varphi^{-1}(A)}|J\varphi|$ à valeurs réelles est mesurable ($\varphi^{-1}(A)$ est mesurable et $|J\varphi|$ est une fonction $L^\infty_{\mathrm{loc}}(U)$, donc mesurable), donc on sait qu'elle est $\mu$-mesurable (dans le cas réel, la $\mu$-mesurabilité coincide avec la mesurabilité).
On a donc bien $f \circ \varphi|J\varphi| \in L^1(U; E)$.
$\diamondsuit$ Etape 2: Soit $T \in E'$: comme $f \in L^1(V; E)$, $T(f) \in L^1(V)$, et on a par le théorème de changement de variable lipschitzien réel

$$T\left(\int_V f\,d\mu\right) = \int_V T(f)\,d\mu = \int_U T(f \circ \varphi|J\varphi|)\,d\mu.$$

Mais $f \circ \varphi|J\varphi| \in L^1(U; E)$, donc $\int_U T(f \circ \varphi|J\varphi|)\,d\mu = T\left(\int_U f \circ \varphi|J\varphi|\,d\mu\right)$, d'où:

$$T\left(\int_V f\,d\mu\right) = T\left(\int_U f \circ \varphi|J\varphi|\,d\mu\right).$$

Ceci étant vrai pour tout $T \in E'$, on en déduit l'égalité du théorème. ∎

## 1.7 Quelques Résultats de Convolution

Le but de cette partie n'est pas d'établir une théorie pour la convolution à valeurs vectorielles, mais juste d'établir quelques résultats de régularisation et d'approximation qui seront utiles lorsque l'on abordera la question des espaces de Sobolev à valeurs vectorielles.

**Proposition 1.7.1** *Soit $1 \le p < +\infty$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^N; E)$ et $g \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^N)$, alors l'expression*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(t)g(x-t)\,dt = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-t)g(t)\,dt$$

*existe pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et on a:*
*i) $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N; E)$ et $||f * g||_{L^p(\mathbb{R}^N;E)} \le ||f||_{L^p(\mathbb{R}^N;E)}||g||_{L^1(\mathbb{R}^N)}$,*
*ii) $f * g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N; E)$ et, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $\partial^\alpha(f * g) = f * (\partial^\alpha g)$.*

Démonstration:
Notons $K$ le support de $g$.
$\diamondsuit$ Etape 1: Preuve de l'existence de l'expression et de i).
On commence par constater que $t \to f(t)g(x-t)$ est $\mu$-mesurable, puisqu'il en est ainsi pour $f$ et puisque, $g$ étant continue, elle est mesurable à valeurs réelles, donc $\mu$-mesurable à valeurs réelles. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, on a $||f(\cdot)g(x-\cdot)|| \le ||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}||f(\cdot)||\mathbf{1}_{x-K}(\cdot)$, donc, en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} ||f(t)g(x-t)||\,dt &\le ||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}^N} ||f(t)||\mathbf{1}_{x-K}\,dt \\ &\le ||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\mu(x-K)^{1-1/p}||f||_{L^p(\mathbb{R}^N;E)} < +\infty,\end{aligned}$$

et $t \to f(t)g(x-t)$ est donc bien dans $L^1(\mathbb{R}^N; E)$: $f * g(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. Le théorème de changement de variable nous donne alors $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(t)g(x-t)\,dt = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-t)g(t)\,dt$.
Par densité de $S(\mathbb{R}^N; E)$ dans $L^p(\mathbb{R}^N; E)$ ($p$ est fini), il existe une suite de fonctions simples $(s_n)_{n\ge1}$ qui converge vers $f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N; E)$; ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$||f * g(x) - s_n * g(x)|| = \left|\left|\int_{\mathbb{R}^N} (f(t) - s_n(t))g(x-t)\,dt\right|\right| \le ||f - s_n|| * |g|(x).$$

Or $||f - s_n|| \to 0$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ lorsque $n \to \infty$, et, d'après les résultats sur la convolution à valeurs réelles, $||\,||f - s_n|| * |g|\,||_{L^p(\mathbb{R}^N)} \le ||g||_{L^1(\mathbb{R}^N)}||\,||f - s_n||\,||_{L^p(\mathbb{R}^N)}$; ainsi, $||f - s_n|| * |g| \to 0$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$

lorsque $n \to \infty$ et, quitte à extraire une suite, on peut supposer que la convergence a lieu $\mu$-presque partout et que l'on a donc $s_n * g(x) \to f * g(x)$ dans $E$ pour $\mu$-presque tout $x \in \mathbb{R}^N$. Pour montrer la $\mu$-mesurabilité de $f * g$, il suffit donc de montrer la $\mu$-mesurabilité de $s_n * g$ pour tout $n \geq 1$, i.e. de montrer que, pour tout $a \in E$ et tout $A \subset \mathbb{R}^N$ de mesure finie, $(a\mathbf{1}_A) * g = a(\mathbf{1}_A * g)$ est $\mu$-mesurable. C'est immédiat lorsque l'on constate que $x \in \mathbb{R}^N \to \mathbf{1}_A * g \in \mathbb{R}$ est mesurable (convolution à valeurs réelles), donc $\mu$-mesurable à valeurs réelles.
Pour conclure cette partie, on remarque que l'on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $||f * g(x)|| \leq \int_{\mathbb{R}^N} ||f(t)|| \, |g(x-t)| \, dt = ||f|| * |g|(x)$; en utilisant les résultats de convolution à valeurs réelles, on en déduit que $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N; E)$ et que $||f * g||_{L^p(\mathbb{R}^N;E)} \leq || \, ||f|| * |g| \, ||_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq ||f||_{L^p(\mathbb{R}^N;E)} ||g||_{L^1(\mathbb{R}^N)}$.
♢ Etape 2: Preuve de ii).
Il suffit de montrer que, pour toute boule $B$ de $\mathbb{R}^N$, $f * g \in \mathcal{C}^\infty(B; E)$ et que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $\partial^\alpha(f * g) = f * (\partial^\alpha g)$ sur $B$.
Fixons donc une boule $B$ de $\mathbb{R}^N$ et raisonnons par récurrence sur $|\alpha|$.
Lorsque $|\alpha| = 1$, on sait que $f(\cdot)g(x-\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^N; E)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$; de plus, $f(t)g(\cdot - t)$ est dérivable sur $B$ pour tout $t \in \mathbb{R}^N$ et $\partial_i(f(t)g(\cdot - t))(x) = f(t)(\partial_i g)(x-t) = H(t,x)$, avec, pour tout $x \in B$ et tout $t \in \mathbb{R}^N$,

$$||H(t,x)|| \leq G(t) = ||\partial_i g||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} ||f(t)|| \mathbf{1}_{B-K}(t).$$

Comme $B - K$ est de mesure finie et $||f(\cdot)|| \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $G$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$; $f * g$ est donc dérivable (dans la direction $i$) sur $B$ et $\partial_i(f * g) = f * (\partial_i g)$. Le reste de la récurrence se fait en appliquant le cas du rang 1 à la convolée $f * (\partial^\alpha g)$, puisque $\partial^\alpha g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. ■

**Proposition 1.7.2** *Soit $1 \leq p < +\infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^N; E)$. En notant, pour $h \in \mathbb{R}^N$, $\tau_h f(x) = f(x+h)$, on a $\tau_h f \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N; E)$ lorsque $h \to 0$.*

DÉMONSTRATION:
Lorsque $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^N; E)$, la propriété est assez évidente puisqu'alors, pour $h \in \mathbb{R}^N$ de norme inférieure à 1,

$$\int_{\mathbb{R}^N} ||\tau_h f - f||^p \, d\mu \leq \mu(\mathrm{supp}(f) + B(0;1)) ||\tau_h f - f||^p_{L^\infty(\mathbb{R}^N;E)},$$

la dernière quantité tendant vers 0 par uniforme continuité de $f$ sur $\mathbb{R}^N$ ($f$ est continue à support compact).
Lorsque $f \in L^p(\mathbb{R}^N; E)$, on écrit, pour $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^N; E)$:

$$||\tau_h f - f||_{L^p(\mathbb{R}^N;E)} \leq ||\tau_h f - \tau_h g||_{L^p(\mathbb{R}^N;E)} + ||\tau_h g - g||_{L^p(\mathbb{R}^N;E)} + ||g - f||_{L^p(\mathbb{R}^N;E)}.$$

Or un changement de variable linéaire nous donne $||\tau_h f - \tau_h g||_{L^p(\mathbb{R}^N;E)} = ||f - g||_{L^p(\mathbb{R}^N;E)}$, donc on obtient l'estimation, valable pour tout $g$ continue à support compact,

$$||\tau_h f - f||_{L^p(\mathbb{R}^N;E)} \leq 2||f - g||_{L^p(\mathbb{R}^N;E)} + ||\tau_h g - g||_{L^p(\mathbb{R}^N;E)}.$$

Mais, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^N; E)$ telle que $||f - g||_{L^p(\mathbb{R}^N;E)} < \varepsilon$ (densité de $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^N; E)$ dans $L^p(\mathbb{R}^N; E)$ lorsque $p < +\infty$), donc $||\tau_h f - f||_{L^p(\mathbb{R}^N;E)} \leq 2\varepsilon + ||\tau_h g - g||_{L^p(\mathbb{R}^N;E)}$ et, comme $g$ est continue à support compact, il existe $\delta > 0$ tel que, dès que $h$ est de norme inféireure à $\delta$, $||\tau_h g - g||_{L^p(\mathbb{R}^N;E)} < \varepsilon$; ainsi, pour tout $h \in B(0, \delta)$, $||\tau_h f - f||_{L^p(\mathbb{R}^N;E)} < 3\varepsilon$ et le lemme est démontré. ■

**Définition 1.7.1** *On dit qu'une suite de fonctions $(\rho_k)_{k \geq 1}$ est une suite régularisante si, pour tout $k \geq 1$,*

$$\rho_k \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}), \ \mathrm{supp}(\rho_k) \subset B(0; 1/k), \ \rho_k \geq 0, \ \text{ et } \int_{\mathbb{R}^N} \rho_k \, d\mu = 1.$$

Remarque:

> Il est bien évident qu'une telle suite existe: on prend $g \in C_c^\infty(B(0;1); \mathbb{R}^+)$ non nulle et on pose $\rho = g/(\int g)$ puis $\rho_k(x) = k^N \rho(kx)$.

**Théorème 1.7.1** *Soit $1 \le p < +\infty$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^N; E)$ et $(\rho_k)_{k\ge 1}$ est une suite régularisante, alors $f * \rho_k \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N; E)$ lorsque $k \to \infty$.*

DÉMONSTRATION:
On a, en utilisant la positivité de $\rho_k$,

$$\begin{aligned} ||f * \rho_k(x) - f(x)|| &= \left|\left|\int_{\mathbb{R}^N} (f(x-t) - f(x))\rho_k(t)\,dt\right|\right| \\ &\le \int_{\mathbb{R}^N} ||f(x-t) - f(x)||\rho_k(t)^{\frac{1}{p}}\rho_k(t)^{1-\frac{1}{p}}\,dt, \end{aligned}$$

donc, grâce à Hölder entre $p$ et $p' = p/(p-1)$ (i.e. $1/p' = 1 - 1/p$):

$$\begin{aligned} ||f * \rho_k(x) - f(x)|| &\le \left(\int_{\mathbb{R}^N} ||f(x-t) - f(x)||^p \rho_k(t)\,dt\right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho_k(t)\,dt\right)^{1/p'} \\ &\le \left(\int_{B(0;1/k)} ||f(x-t) - f(x)||^p \rho_k(t)\,dt\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

En intégrant ceci par rapport à $x$ et en utilisant Fubini-Tonelli, on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} ||f * \rho_k(x) - f(x)||^p\,dx &\le \int_{B(0;1/k)} \rho_k(t) \left(\int_{\mathbb{R}^N} ||f(x-t) - f(x)||^p\,dx\right)dt \\ &\le \left(\sup_{||t||\le 1/k} ||f(\cdot - t) - f(\cdot)||^p_{L^p(\mathbb{R}^N;E)}\right) \int_{B(0;1/k)} \rho_k(t)\,dt \\ &\le \sup_{||t||\le 1/k} ||\tau_{-t} f - f||^p_{L^p(\mathbb{R}^N;E)}. \end{aligned}$$

Or, par la proposition précédente, cette dernière quantité tend vers 0 lorsque $k \to \infty$, ce qui achève la démonstration. ∎

## 1.8 Cas où $E$ est un espace de Lebesgue ou Sobolev

Dans ce qui suit, $U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^s$ et $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On note $\lambda_d$ la mesure de Lebesgue en dimension $d$.

### 1.8.1 Intégrale Vectorielle et Produit d'Espaces Mesurés

Il est naturel d'esperer que, lorsque $p \in [1, +\infty]$, notre définition de $L^p(U; L^p(\Omega))$ donne un espace canoniquement isomorphe à $L^p(U \times \Omega)$. C'est souvent le cas, mais pas toujours (en fait, seul le cas $p = \infty$ pose problème).

Soit $1 \le q < +\infty$. Prenons une fonction $f : U \times \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable par rapport à ses deux arguments telle que, pour presque tout $x \in U$, $\int_\Omega |f_x|^q\,d\lambda_N$ soit fini (on sait déjà, puisque $f$ est mesurable par rapport à ses deux arguments, que $y \to f_x(y)$ est mesurable). La fonction $f$ peut donc être vue (quitte à la redéfinir sur un ensemble de mesure nulle dans $U$) comme une fonction définie sur $U$ et à valeurs dans $L^q(\Omega)$. La question que l'on peut donc se poser est: "la fonction

$$\left\{ \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & L^q(\Omega) \\ x & \longrightarrow & f_x \end{array} \right.$$

est-elle $\lambda_s$-mesurable?", en espérant une réponse positive grâce à la mesurabilité de $f$ par rapport à ses deux variables. La réponse est effectivement positive.

DÉMONSTRATION:
On sait, puisque $q < +\infty$, que $L^q(\Omega)$ est séparable. Soit $D$ une partie dense dénombrable dans $L^q(\Omega)$. Notons $F : U \to L^q(\Omega)$ la fonction définie par $F(x) = f_x$. Nous voulons montrer la $\lambda_s$-mesurabilité de $F$; comme $U$ est de mesure $\sigma$-finie et $L^q(\Omega)$ est séparable, cela revient à démontrer la mesurabilité de $||F(\cdot) - d||_{L^q(\Omega)} : U \to \mathbb{R}^+$ pour tout $d \in D$.

Or $|f(x,y)-d(y)|^q \geq 0$ et $|f(x,y)-d(y)|^q$ est mesurable par rapport à ses deux arguments, donc le théorème de Fubini-Tonelli nous dit que l'application

$$H : x \to \int_\Omega |f_x - d|^q \, d\lambda_N = ||F(x)-d||^q_{L^q(\Omega)}$$

est mesurable sur $U$, ce qui conclut la preuve. ■

Une application particulièrement intéressante de ce qui précède est la caractérisation suivante des fonctions de $L^p(U;L^q(\Omega))$.

**Proposition 1.8.1** *Soit $1 \leq p \leq +\infty$ et $1 \leq q < +\infty$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes:*
*i) $f \in L^p(U;L^q(\Omega))$.*
*ii) $f : U \times \Omega \to \mathbb{R}$ est mesurable et vérifie*

$$\int_U \left( \int_\Omega |f(x,y)|^q \, d\lambda_N(y) \right)^{p/q} d\lambda_s(x) < +\infty \qquad \textit{(si } p < +\infty\textit{),}$$

*ou bien*

$$\exists M \geq 0 \mid \int_\Omega |f(x,y)|^q \, d\lambda_N(y) \leq M \textit{ pour } \lambda_s\textit{-presque tout } x \in U \qquad \textit{(si } p = +\infty\textit{).}$$

Remarque:

Cette proposition nous permet donc de voir que, si $p \in [1,+\infty[$, $L^p(U;L^p(\Omega))$ est naturellement identifiable à $L^p(U \times \Omega)$.

Démonstration:
♢ Etape 1: sens ii) $\Rightarrow$ i).
La condition ii) nous dit que, pour $\lambda_s$-presque tout $x \in U$, $f(x,\cdot) \in L^q(\Omega)$ (la mesurabilité de $f_x : \Omega \to \mathbb{R}$ est assurée par la mesurabilité de $f$ par rapport à ses deux arguments). On sait alors, par ce qui précède, que $x \in U \to f(x,\cdot) \in L^q(\Omega)$ est $\lambda_s$-mesurable. Une fois la $\lambda_s$-mesurabilité de $f$ prouvée, l'appartenance de $f$ à $L^p(U;L^q(\Omega))$ est une simple traduction des inégalités de ii).
♢ Etape 2: sens i) $\Rightarrow$ ii). La principale difficulté réside bien sûr dans la mesurabilité de $f$ par rapport à ses deux arguments.
L'application de prolongation par 0 en dehors de $\Omega$ est linéaire continue $L^q(\Omega) \to L^q(\mathbb{R}^N)$, donc en considérant $\widetilde{f}$ la fonction $f$ prolongée ainsi pour chaque $x \in U$, on a $\widetilde{f} \in L^p(U;L^q(\mathbb{R}^N))$ et $\widetilde{f} = f$ sur $U \times \Omega$: il suffit de montrer la mesurabilité de $\widetilde{f}$ sur $U \times \mathbb{R}^N$.
Soit, pour $n \geq 1$, $\varphi_n \in L^{q'}(\mathbb{R}^N)$ la fonction définie par $\varphi_n = \frac{1}{\lambda_N(B(0;1/n))}\mathbf{1}_{B(0;1/n)}$; on sait que l'application $C_n : L^q(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{C}^0_b(\mathbb{R}^N)$ de convolution par $\varphi_n$ est linéaire continue; de plus, $\widetilde{f}(x,\cdot)$ est limite, pour $\lambda_s$-presque tout $x \in U$ et dans $L^q(\mathbb{R}^N)$, de fonctions $(t_{k,n}(x,\cdot))_{k\geq 1}$ de la forme $\sum_{\text{finie}} a_i(\cdot)\mathbf{1}_{A_i}(x)$, avec $a_i \in L^q(\mathbb{R}^N)$ et $A_i$ mesurable dans $U$. Ainsi, $C_n(\widetilde{f}(x,\cdot))$ est limite, pour $\lambda_s$-presque tout $x \in U$ et dans $\mathcal{C}^0_b(\mathbb{R}^N)$, de fonctions $(C_n(t_{k,n}(x,\cdot)))_{k\geq 1}$ de la forme $\sum_{\text{finie}} a_i * \varphi_n(\cdot)\mathbf{1}_{A_i}(x)$; on en déduit que, pour $\lambda_s$-presque tout $x \in U$ et pour tout $y \in \mathbb{R}^N$, $\lim_{k\to\infty} C_n(t_{k,n}(x,\cdot))(y) = C_n(\widetilde{f}(x,\cdot))(y)$. Mais $(x,y) \to \sum_{\text{finie}} a_i * \varphi_n(y)\mathbf{1}_{A_i}(x)$ est mesurable par rapport à ses deux arguments, donc $F_n : (x,y) \to C_n(\widetilde{f}(x,\cdot))(y)$ est mesurable sur $U \times \mathbb{R}^N$ en tant que limite simple $(\lambda_s \otimes \lambda_N)$-presque partout de fonctions mesurables.
Pour tout $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$, $C_n(g) \to g$ $\lambda_N$-presque partout (en tous les points de Lebesgue de $g$); ainsi, pour tout $x \in U$, comme $\widetilde{f}(x,\cdot) \in L^q(\mathbb{R}^N)$, pour presque tout $y \in \mathbb{R}^N$, $C_n(\widetilde{f}(x,\cdot))(y) \to \widetilde{f}(x,y)$. On en conclut donc (grâce au lemme 1.5.1) que, $(\lambda_s \otimes \lambda_N)$-presque partout sur $U \times \mathbb{R}^N$, $F_n \to \widetilde{f}$; comme $F_n$ est mesurable, on obtient la mesurabilité de $\widetilde{f}$, donc de $f$. La condition d'intégrabilité de $f$ donnée dans ii) est simplement la traduction de la condition d'intégrabilité sur $x \to ||f(x)||_{L^q(\Omega)}$ pour que $f \in L^p(U;L^q(\Omega))$.
■

Voyons maintenant pourquoi ce résultat est faux lorsque $q = +\infty$: nous allons exhiber une fonction de $L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ qui n'appartient pas à $L^\infty(\mathbb{R};L^\infty(\mathbb{R}))$.
Soit $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(r,x) = \mathbf{1}_{]-|r|,|r|[}(x)$; en notant $A = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid |a| > |b|\}$, mesurable dans $\mathbb{R}^2$, on constate que $f = \mathbf{1}_A(r,x)$ et que $f$ est donc dans $L^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Cependant, $f \notin L^\infty(\mathbb{R}; L^\infty(\mathbb{R}))$ car, si c'était le cas, il existerait un ensemble $B \subset \mathbb{R}$ de mesure nulle tel que $f(\mathbb{R}\backslash B)$ soit séparable dans $L^\infty(\mathbb{R})$ (on a bien sûr noté, pour $r \in \mathbb{R}$, $f(r)$ la fonction $x \to f(r,x)$, fonction qui est dans $L^\infty(\mathbb{R})$ car $f$ est mesurable par rapport à ses deux arguments et bornée); or, $B$ étant de mesure nulle, $\mathbb{R}^+\backslash B$ n'est pas dénombrable (sinon $\mathbb{R}^+$ serait de mesure nulle...): on peut trouver, dans $\mathbb{R}^+\backslash B$, une famille non dénombrable de réels distincts $\{r_i\,,\ i \in I\}$. Les ouverts $B_{L^\infty(\mathbb{R})}(f(r_i), 1/3)$ sont alors en quantité non-dénombrable (comme $I$) et disjoints: si $B_{L^\infty(\mathbb{R})}(f(r_i), 1/3) \cap B_{L^\infty(\mathbb{R})}(f(r_j), 1/3) \neq \emptyset$ avec, par exemple, $r_i \geq r_j$, alors

$$\begin{aligned} ||f(r_i) - f(r_j)||_{L^\infty(\mathbb{R})} &= ||\mathbf{1}_{]-r_i,r_i[} - \mathbf{1}_{]-r_j,r_j[}||_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ &= ||\mathbf{1}_{]-r_i,-r_j[\cup]r_j,r_i[}||_{L^\infty(\mathbb{R})} < 2/3, \end{aligned}$$

ce qui implique $r_i = r_j$ et $i = j$. Si $f(\mathbb{R}\backslash B)$ était séparable, il existerait une partie dénombrable dense $D$ dans $f(\mathbb{R}\backslash B)$, et on pourrait donc, pour chaque $i \in I$, trouver $d_i \in D$ tel que $d_i \in B_{L^\infty(\mathbb{R})}(f(r_i), 1/3)$; mais comme ces ouverts sont deux à deux disjoints, les $(d_i)_{i\in I}$ sont tous distincts et on a donc trouvé une injection de $I$ dans $D$, ce qui est impossible puisque $I$ est non-dénombrable et $D$ est dénombrable.
On a utilisé, pour montrer que $f \notin L^\infty(\mathbb{R}, L^\infty(\mathbb{R}))$, le fait qu'une limite simple de fonctions simples a une image séparable (modulo un ensemble de mesure nulle au depart); en fait, le problème posé par cette fonction $f(r,x) = \mathbf{1}_{]-|r|,|r|[}(x)$ est bien plus profond que cela: $f : \mathbb{R} \to L^\infty(\mathbb{R})$ n'est même pas mesurable! En effet, en prenant $S \subset \mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 et non-mesurable, en définissant $\mathcal{U} = \cup_{s\in S} B_{L^\infty(\mathbb{R})}(\mathbf{1}_{]-|s|,|s|[}, 1/3)$, on constate que $\mathcal{U}$ est un ouvert de $L^\infty(\mathbb{R})$ (réunion de boules ouvertes) et que $f^{-1}(\mathcal{U}) = \{r \in \mathbb{R} \mid \exists s \in S\,,\ f(r) = \mathbf{1}_{]-|r|,|r|[} \in B_{L^\infty(\mathbb{R})}(\mathbf{1}_{]-|s|,|s|[}, 1/3)\} = \{r \in \mathbb{R} \mid \exists s \in S\,,\ |r| = |s|\} = S$, c'est à dire que $f$ ne peut être mesurable.

En application des remarques suivant la définition des espaces $L^p$ sur l'action des formes bilinéaires continues sur ces espaces, on constate que, si $(p_0, q_0, r_0, p_1, q_1, r_1) \in [1, +\infty]$ vérifient $\frac{1}{p_0} + \frac{1}{q_0} = \frac{1}{r_0}$ et $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{r_1}$, alors pour tous $f \in L^{p_0}(U; L^{p_1}(\Omega))$ et $g \in L^{q_0}(U; L^{q_1}(\Omega))$, on a $fg \in L^{r_0}(U; L^{r_1}(\Omega))$ (car la multiplication $L^{p_1}(\Omega) \times L^{q_1}(\Omega) \to L^{r_1}(\Omega)$ est bilinéaire continue). En particulier, si $r_0 = r_1 = 1$, cela implique $fg \in L^1(U; L^1(\Omega)) = L^1(U \times \Omega)$; on peut donc appliquer le théorème de Fubini aux intégrales des produits de fonctions de $L^p(U; L^q(\Omega))$ et $L^{p'}(U; L^{q'}(\Omega))$.

### 1.8.2 Identification Ponctuelle

Prenons $f \in L^1(U; L^1(\Omega))$; $g = \int_U f(x)\, d\lambda_s(x)$ est une fonction de $L^1(\Omega)$.
Mais on peut aussi considérer $f$ comme une application $f(\cdot,\cdot) \in L^1(U \times \Omega)$ (en posant simplement $f(x,y) = f(x)(y)$, c'est le contenu de la proposition 1.8.1) auquel cas, par le théorème de Fubini, pour $\lambda_N$-presque tout $y \in \Omega$, $h(y) = \int_U f(x,y)\, d\lambda_s(x)$ existe et définit un élément de $L^1(\Omega)$.
Naturellement, on s'attend à ce que $g = h$ $\lambda_N$-presque partout sur $\Omega$, c'est à dire

$$\left(\int_U f(x)\, d\lambda_s(x)\right)(y) = \int_U f(x,y)\, d\lambda_s(x) \text{ pour } \lambda_N\text{-presque tout } y \in \Omega.$$

C'est en effet le cas.
Démonstration:
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$; par le théorème de Fubini, on a

$$\int_\Omega h(y)\varphi(y)\, d\lambda_N(y) = \int_U \left(\int_\Omega f(x,y)\varphi(y)\, d\lambda_N(y)\right) d\lambda_s(x).$$

Or l'application $l : v \in L^1(\Omega) \to \int_\Omega v\varphi\, d\lambda_N$ est lineaire continue, donc

$$\int_\Omega g(y)\varphi(y)\, d\lambda_N(y) = l(g) = \int_U l(f(x))\, d\lambda_s(x) = \int_U \left(\int_\Omega f(x)(y)\varphi(y)\, d\lambda_N(y)\right) d\lambda_s(x).$$

On en déduit que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\int_\Omega h(y)\varphi(y)\, d\lambda_N(y) = \int_\Omega g(y)\varphi(y)\, d\lambda_N(y)$, c'est à dire que $h = g$ $\lambda_N$-presque partout sur $\Omega$. ∎

### 1.8.3 Convolution globale

Nous avons déjà vu des théorèmes de densité relativement généraux; par exemple, le corollaire 1.3.1 permet de voir que, lorsque $p$ et $q$ sont finis, $\mathcal{C}_c^\infty(U \times \Omega)$ est dense dans $L^p(U; L^q(\Omega))$ (ce corollaire donne même la densité d'un espace de fonctions tensorielles dans $L^p(U; L^q(\Omega))$).
Il existe cependant un outil général et puissant pour approximer des fonctions: la convolution. C'est une technique très intéressante car elle permet de construire une suite de fonctions régulières explicites qui approche une fonction donnée, en conservant de plus certaines propriétés de ladite fonction (comme la positivité, etc...); de plus, la suite ainsi construite peut converger vers la fonction donnée simultanément dans divers espaces.
Nous avons déjà utilisé la convolution (théorème 1.7.1) pour régulariser les fonctions de $L^p(\mathbb{R}^N; E)$, lorsque $E$ est un espace de Banach abstrait (nous avons alors convolé dans $\mathbb{R}^N$). Mais lorsque $E$ est un espace de fonctions, par exemple un espace de Lebesgue, nous pourrions vouloir aussi convoler dans cet espace $E$, voire même convoler simultanément dans les deux jeux de variables.
Nous nous proposons ici de montrer que les convolutions "globales" convergent aussi. Ce résultat, bien que relativement naturel, n'est pas trivial; par exemple, si l'on tente de traiter la convolution dans $L^p(\mathbb{R}^s; L^q(\mathbb{R}^N))$ brutalement, en appliquant les techniques usuelles de la convolution successivement à chaque variable, on se retrouve bloqué lorsque $p < q$.

La première chose à établir, afin de pouvoir prouver un théorème d'approximation par convolution, est la continuité des translations. La technique est ici totalement similaire au cas classique des translations dans les espaces $L^r(\mathbb{R}^l)$.

**Lemme 1.8.1** *Si $(p,q) \in [1,\infty[$, $f \in L^p(\mathbb{R}^s; L^q(\mathbb{R}^N))$ et, pour $(h,k) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^N$, $\tau_{(h,k)}f(x,y) = f(x+h, y+k)$, alors $\tau_{(h,k)}f \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^s; L^q(\mathbb{R}^N))$ lorsque $(h,k) \to 0$.*

Démonstration:
En utilisant la caractérisation de la proposition 1.8.1, on constate d'abord que l'on a bien $\tau_{(h,k)}f \in L^p(\mathbb{R}^s; L^q(\mathbb{R}^N))$ pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^N$.
Supposons pour commencer que $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^s; L^q(\mathbb{R}^N))$. Notons $K_1$ un compact de $\mathbb{R}^s$ et $K_2$ un compact de $\mathbb{R}^N$ tels que $\mathrm{supp}(f) \subset K_1 \times K_2$. Soit $(h,k) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^N$ tel que $|(h,k)| < 1$ (on prend, pour fixer les idées, la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^N$) et $x \in \mathbb{R}^s$; puisque $\tau_{(h,k)}f(x,\cdot) - f(x,\cdot)$ a son support dans $K_2 + B_N(0;1)$([1]) et $\sup_{\eta\in\mathbb{R}^N} |\tau_{(h,k)}f(x,\eta) - f(x,\eta)| = 0$ dès que $x \notin K_1 + B_s(0;1)$ (car alors $x$ et $x+h$ n'appartiennent pas à $K_1$), on a

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} |\tau_{(h,k)}f(x,y) - f(x,y)|^q \, d\lambda_N(y) \\
&\quad \le \lambda_N(K_2 + B_N(0;1)) \left( \sup_{\eta\in\mathbb{R}^N} |\tau_{(h,k)}f(x,\eta) - f(x,\eta)| \right)^q \\
&\quad \le \lambda_N(K_2 + B_N(0;1)) \left( \sup_{(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^N} |\tau_{(h,k)}f(\xi,\eta) - f(\xi,\eta)| \right)^q \mathbf{1}_{K_1+B_s(0;1)}(x).
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^s} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\tau_{(h,k)}f(x,y) - f(x,y)|^q \, d\lambda_N(y) \right)^{p/q} d\lambda_s(x) \\
&\quad \le \lambda_s(K_1 + B_s(0;1)) \lambda_N(K_2 + B_N(0;1))^{p/q} \left( \sup_{(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^N} |\tau_{(h,k)}f(\xi,\eta) - f(\xi,\eta)| \right)^p .
\end{aligned}
$$

Comme $\lambda_s(K_1 + B_s(0;1)) < \infty$ et $\lambda_N(K_2 + B_N(0;1)) < \infty$, cette dernière quantité tend vers 0 lorsque $(h,k) \to 0$, par uniforme continuité de $f$, ce qui prouve le résultat du lemme lorsque $f$ est continue à support compact.

[1] On note $B_l(0;1)$ la boule euclidienne unitaire de centre 0 dans $\mathbb{R}^l$.

Prenons maintenant $f$ quelconque dans $L^p(\mathbb{R}^s; L^q(\mathbb{R}^N))$. Si $g$ est une autre fonction de $L^p(\mathbb{R}^s; L^q(\mathbb{R}^N))$, on a, par des changements de variable affines, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned}
||\tau_{(h,k)}f - \tau_{(h,k)}g||^p_{L^p(\mathbb{R}^s;L^q(\mathbb{R}^N))} &= \int_{\mathbb{R}^s} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |f(x+h,y+k) - g(x+h,y+k)|^q \, d\lambda_N(y) \right)^{p/q} d\lambda_s(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^s} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |f(x+h,y) - g(x+h,y)|^q \, d\lambda_N(y) \right)^{p/q} d\lambda_s(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^s} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |f(x,y) - g(x,y)|^q \, d\lambda_N(y) \right)^{p/q} d\lambda_s(x).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
&||\tau_{(h,k)}f - f||_{L^p(\mathbb{R}^s;L^q(\mathbb{R}^N))} \\
&\quad \leq \; ||\tau_{(h,k)}f - \tau_{(h,k)}g||_{L^p(\mathbb{R}^s;L^q(\mathbb{R}^N))} + ||\tau_{(h,k)}g - g||_{L^p(\mathbb{R}^s;L^q(\mathbb{R}^N))} + ||f-g||_{L^p(\mathbb{R}^s;L^q(\mathbb{R}^N))} \\
&\quad \leq \; 2||f-g||_{L^p(\mathbb{R}^s;L^q(\mathbb{R}^N))} + ||\tau_{(h,k)}g - g||_{L^p(\mathbb{R}^s;L^q(\mathbb{R}^N))}.
\end{aligned}$$

Mais, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathcal{C}^0_c(\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^N)$ telle que $||f-g||_{L^p(\mathbb{R}^s;L^q(\mathbb{R}^N))} \leq \varepsilon$ (conséquence immédiate du corollaire 1.3.1); de plus, on a vu précédemment que $||\tau_{(h,k)}g - g||_{L^p(\mathbb{R}^s;L^q(\mathbb{R}^N))} \to 0$ lorsque $(h,k) \to 0$, puisque $g$ est continue à support compact. On déduit de ceci qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $|(h,k)| < \delta$, on a

$$||\tau_{(h,k)}f - f||_{L^p(\mathbb{R}^s;L^q(\mathbb{R}^N))} \leq 3\varepsilon,$$

ce qui achève la preuve de ce lemme. ■

Lorsque $f \in L^p(\mathbb{R}^s; L^q(\mathbb{R}^N))$, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^N$, on a $f \in L^p(\mathbb{R}^s; L^q(K))$ et comme $L^q(K) \subset L^1(K)$, $f \in L^p(\mathbb{R}^s; L^1(K))$. Donc, pour tout compact $M \subset \mathbb{R}^s$, comme $L^p(M; L^1(K)) \subset L^1(M; L^1(K)) = L^1(M \times K)$, on a $f \in L^1(M \times K)$, ce qui signifie que $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^N)$.
On sait alors que, pour $g \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^N)$,

$$f * g(x,y) = \int_{\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^N} f(x-\xi, y-\eta) g(\xi,\eta) \, d\lambda_s(\xi) \, d\lambda_N(\eta)$$

est bien défini et que $f * g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^N)$.
On peut maintenant citer le théorème d'approximation par convolution globale.

**Théorème 1.8.1** *Soit $(p,q) \in [1,\infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^s; L^q(\mathbb{R}^N))$. On prend $(\rho_n)_{n\geq 1}$ une suite régularisante sur $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^N$. Alors, pour tout $n \geq 1$, on a $f * \rho_n \in L^p(\mathbb{R}^s; L^q(\mathbb{R}^N)) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^N)$,*

$$||f * \rho_n||_{L^p(\mathbb{R}^s;L^q(\mathbb{R}^N))} \leq ||f||_{L^p(\mathbb{R}^s;L^q(\mathbb{R}^N))} \tag{1.8.1}$$

*et $f * \rho_n \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^s; L^q(\mathbb{R}^N))$ lorsque $n \to \infty$.*

Démonstration:
◇ Etape 1: on commence par quelques constatations.
Soit $h \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^N)$ telle que $||h||_{L^1(\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^N)} \leq 1$. Soit $G \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^s; L^q(\mathbb{R}^N))$.
Si $K$ est un compact de $\mathbb{R}^s$, comme $\mathrm{supp}(h)$ est un compact de $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^N$, $(\xi,\eta,x) \to G(\xi,\eta,x,\cdot)h(\xi,\eta)$ appartient à $L^1(\mathrm{supp}(h) \times K; L^q(\mathbb{R}^N))$. Ainsi, par Fubini,

$$F(x,\cdot) = \int_{\mathrm{supp}(h)} G(\xi,\eta,x,\cdot) h(\xi,\eta) \, d\lambda_s(\xi) \, d\lambda_N(\eta)$$

est bien définie et appartient à $L^1(K; L^q(\mathbb{R}^N))$. Ceci étant vrai pour tout compact de $K$ de $\mathbb{R}^s$, on en déduit que $F$ ainsi définie est dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^s; L^q(\mathbb{R}^N))$. Puisque $(\xi,\eta) \to G(\xi,\eta,x,\cdot)h(\xi,\eta)$ est dans $L^1(\mathrm{supp}(h); L^q(\mathbb{R}^N))$ pour $\lambda_s$-presque tout $x \in \mathbb{R}^s$ (c'est une conséquence du théorème de Fubini, que nous avons déjà utilisée pour voir que $F$ était bien définie), (1.2.3) donne

$$||F(x,\cdot)||_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq \int_{\mathrm{supp}(h)} ||G(\xi,\eta,x,\cdot)||_{L^q(\mathbb{R}^N)} |h(\xi,\eta)| \, d\lambda_s(\xi) \, d\lambda_N(\eta).$$

On a donc, par Hölder et puisque $||h||_{L^1(\mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^N)}\le 1$,

$$\begin{aligned} ||F(x,\cdot)||^p_{L^q(\mathbb{R}^N)} &\le \left(\int_{\mathrm{supp}(h)} ||G(\xi,\eta,x,\cdot)||_{L^q(\mathbb{R}^N)}|h(\xi,\eta)|^{\frac{1}{p}}|h(\xi,\eta)|^{\frac{1}{p'}}\,d\lambda_s(\xi)\,d\lambda_N(\eta)\right)^p \\ &\le \int_{\mathrm{supp}(h)} ||G(\xi,\eta,x,\cdot)||^p_{L^q(\mathbb{R}^N)}|h(\xi,\eta)|\,d\lambda_s(\xi)\,d\lambda_N(\eta). \end{aligned} \tag{1.8.2}$$

Comme $G\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^s;L^q(\mathbb{R}^N))$, l'application $(\xi,\eta,x)\to ||G(\xi,\eta,x,\cdot)||_{L^q(\mathbb{R}^N)}$ est mesurable et $(\xi,\eta,x)\to ||G(\xi,\eta,x,\cdot)||^p_{L^q(\mathbb{R}^N)}|h(\xi,\eta)|$ est aussi mesurable. Par Fubini-Tonelli, on en déduit que le membre de droite de (1.8.2) est mesurable par rapport à $x$. Comme $F\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^s;L^q(\mathbb{R}^N))$, le membre de gauche de (1.8.2) est aussi mesurable par rapport à $x$. On trouve alors, en intégrant (1.8.2) par rapport à $x\in\mathbb{R}^s$ et en utilisant Fubini-Tonelli,

$$\int_{\mathbb{R}^s} ||F(x,\cdot)||^p_{L^q(\mathbb{R}^N)}\,d\lambda_s(x)\le \int_{\mathrm{supp}(h)}\left(\int_{\mathbb{R}^s}||G(\xi,\eta,x,\cdot)||^p_{L^q(\mathbb{R}^N)}\,d\lambda_s(x)\right)|h(\xi,\eta)|\,d\lambda_s(\xi)\,d\lambda_N(\eta). \tag{1.8.3}$$

C'est la première constatation à laquelle nous voulions parvenir dans cette étape.
La deuxième constatation est une application immédiate du résultat de la partie 1.8.2. Pour tout $\Omega$ ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, l'application $(\xi,\eta,x)\to G(\xi,\eta,x,\cdot)h(\xi,\eta)$ appartient à $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^s;L^1(\Omega))$ (car elle est dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^s;L^q(\mathbb{R}^N))$ et la restriction $L^q(\mathbb{R}^N)\to L^1(\Omega)$ est linéaire continue). Par Fubini, en prenant $U$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^N$ qui contient le support de $h$, pour $\lambda_s$-presque tout $x\in\mathbb{R}^s$, $(\xi,\eta)\to G(\xi,\eta,x,\cdot)h(\xi,\eta)$ est donc dans $L^1(U;L^1(\Omega))$; le principe d'identification ponctuelle nous donne alors, pour $\lambda_N$-presque tout $y\in\Omega$,

$$F(x,y)=\left(\int_U G(\xi,\eta,x,\cdot)h(\xi,\eta)\,d\lambda_s(\xi)\,d\lambda_N(\eta)\right)(y)=\int_U G(\xi,\eta,x,y)h(\xi,\eta)\,d\lambda_s(\xi)\,d\lambda_N(\eta) \tag{1.8.4}$$

(où le dernier membre de (1.8.4) est défini grâce à une application de Fubini sur une fonction de $L^1(U\times\Omega)$). (1.8.4) étant valable pour $\lambda_s$-presque tout $x\in\mathbb{R}^s$ et $\lambda_N$-presque tout $y\in\Omega$, où $\Omega$ est un ouvert borné quelconque de $\mathbb{R}^N$, on en déduit qu'elle est valable pour $\lambda_{s+N}$-presque tout $(x,y)\in\mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^N$ (de plus, la dernière intégrale de cette expression peut se limiter à $\mathrm{supp}(h)$).

◇ Etape 2: preuve de (1.8.1).
Appliquons l'étape 1 à $h=\rho_n$ et $G(\xi,\eta,x,y)=f(x-\xi,y-\eta)$. $G$ est clairement mesurable par rapport à tous ses arguments (cf proposition 1.8.1) et, pour tous $K$, $L$ et $M$ compacts de $\mathbb{R}^s$, $\mathbb{R}^N$ et $\mathbb{R}^s$, on a

$$\begin{aligned} &\int_{K\times L\times M}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|G(\xi,\eta,x,y)|^q\,d\lambda_N(y)\right)^{1/q} d\lambda_s(\xi)\,d\lambda_N(\eta)\,d\lambda_s(x)\\ &= \int_{K\times L\times M}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|f(x-\xi,z)|^q\,d\lambda_N(z)\right)^{1/q} d\lambda_s(\xi)\,d\lambda_N(\eta)\,d\lambda_s(x)\\ &\le \lambda_N(L)\int_M\left(\int_{x-K}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|f(w,z)|^q\,d\lambda_N(z)\right)^{1/q} d\lambda_s(w)\right)d\lambda_s(x)\\ &\le \lambda_N(L)\lambda_s(K)^{1/p'}\int_M\left(\int_{x-K}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|f(w,z)|^q\,d\lambda_N(z)\right)^{p/q} d\lambda_s(w)\right)^{1/p} d\lambda_s(x)\\ &\le \lambda_N(L)\lambda_s(K)^{1/p'}\lambda_s(M)\left(\int_{\mathbb{R}^s}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|f(w,z)|^q\,d\lambda_N(z)\right)^{p/q} d\lambda_s(w)\right)^{1/p} \end{aligned}$$

qui est fini puisque $f\in L^p(\mathbb{R}^s;L^q(\mathbb{R}^N))$; $G$ est donc bien dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^s;L^q(\mathbb{R}^N))$ (voir toujours la proposition 1.8.1). Comme $F(x,y)=f*\rho_n(x,y)$ dans ce cadre (on utilise ici l'expression (1.8.4) de $F$), on déduit de (1.8.3), grâce à des changements de variable affines, que

$$\int_{\mathbb{R}^s}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|f*\rho_n(x,y)|^q\,d\lambda_N(y)\right)^{p/q} d\lambda_s(x)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_{\mathrm{supp}(\rho_n)} \left( \int_{\mathbb{R}^s} ||f(x-\xi, \cdot - \eta)||^p_{L^q(\mathbb{R}^N)} \, d\lambda_s(x) \right) |\rho_n(\xi,\eta)| \, d\lambda_s(\xi) \, d\lambda_N(\eta) \\
&= ||f||^p_{L^p(\mathbb{R}^s; L^q(\mathbb{R}^N))} \int_{\mathrm{supp}(\rho_n)} \rho_n(\xi,\eta) \, d\lambda_s(\xi) \, d\lambda_N(\eta) \\
&= ||f||^p_{L^p(\mathbb{R}^s; L^q(\mathbb{R}^N))},
\end{aligned}
$$

ce qui prouve bien que $f * \rho_n \in L^p(\mathbb{R}^s; L^q(\mathbb{R}^N))$ (proposition 1.8.1) et établit simultanément l'inégalité (1.8.1).

$\diamondsuit$ Etape 3: preuve de la convergence.
On prend toujours $h = \rho_n$, mais on pose cette fois $G(\xi, \eta, x, y) = f(x-\xi, y-\eta) - f(x,y)$. Si $K$, $L$ et $M$ sont des compacts de $\mathbb{R}^s$, $\mathbb{R}^N$ et $\mathbb{R}^N$ on a,

$$
\begin{aligned}
&\int_{K\times L\times M} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |G(\xi,\eta,x,y)|^q \, d\lambda_N(y) \right)^{1/q} d\lambda_s(\xi) \, d\lambda_N(\eta) \, d\lambda_s(x) \\
&\leq \int_{K\times L\times M} \left( \int_{\mathbb{R}^N} 2^q |f(x-\xi, y-\eta)|^q + 2^q |f(x,y)|^q \, d\lambda_N(y) \right)^{1/q} d\lambda_s(\xi) \, d\lambda_N(\eta) \, d\lambda_s(x) \\
&\leq 2^{1+\frac{1}{q}} \int_{K\times L\times M} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-\xi, y-\eta)|^q \, d\lambda_N(y) \right)^{1/q} d\lambda_s(\xi) \, d\lambda_N(\eta) \, d\lambda_s(x) \qquad (1.8.5) \\
&\quad + 2^{1+\frac{1}{q}} \int_{K\times L\times M} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |f(x,y)|^q \, d\lambda_N(y) \right)^{1/q} d\lambda_s(\xi) \, d\lambda_N(\eta) \, d\lambda_s(x). \qquad (1.8.6)
\end{aligned}
$$

On a vu dans l'étape 2 que (1.8.5) est fini. Le terme (1.8.6) est majoré, grâce à Hölder, par

$$
2^{1+\frac{1}{q}} \lambda_s(K) \lambda_N(L) \lambda_s(M)^{1/p'} ||f||_{L^p(\mathbb{R}^s; L^q(\mathbb{R}^N))}
$$

qui est fini. $G$ est donc bien dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^s; L^q(\mathbb{R}^N))$.
Dans ce cadre, on a (toujours en utilisant l'expression (1.8.4) pour $F(x,y)$)

$$
F(x,y) = \int_{\mathrm{supp}(\rho_n)} (f(x-\xi, y-\eta) - f(x,y)) \rho_n(\xi,\eta) \, d\lambda_s(\xi) \, d\lambda_N(\eta) = f * \rho_n(x,y) - f(x,y).
$$

En appliquant (1.8.3), on a donc, puisque $\mathrm{supp}(\rho_n) \subset B_{s+N}(0; 1/n)$,

$$
\begin{aligned}
&||f * \rho_n - f||^p_{L^p(\mathbb{R}^s; L^q(\mathbb{R}^N))} \\
&\leq \int_{\mathrm{supp}(\rho_n)} \left( \int_{\mathbb{R}^s} ||f(x-\xi, \cdot - \eta) - f(x, \cdot)||^p_{L^q(\mathbb{R}^N)} \, d\lambda_s(x) \right) \rho_n(\xi,\eta) \, d\lambda_s(\xi) \, d\lambda_N(\eta) \\
&\leq \int_{B_{s+N}(0;1/n)} \left( \int_{\mathbb{R}^s} ||\tau_{(-\xi,-\eta)} f(x, \cdot) - f(x, \cdot)||^p_{L^q(\mathbb{R}^N)} \, d\lambda_s(x) \right) \rho_n(\xi,\eta) \, d\lambda_s(\xi) \, d\lambda_N(\eta) \\
&\leq \sup_{(h,k)\in B_{s+N}(0;1/n)} \left( \int_{\mathbb{R}^s} ||\tau_{(h,k)} f(x, \cdot) - f(x, \cdot)||^p_{L^q(\mathbb{R}^N)} \, d\lambda_s(x) \right) \times \int_{B_{s+N}(0;1/n)} \rho_n(\xi,\eta) \, d\lambda_s(\xi) \, d\lambda_N(\eta) \\
&\leq \sup_{(h,k)\in B_{s+N}(0;1/n)} ||\tau_{(h,k)} f - f||^p_{L^p(\mathbb{R}^s; L^q(\mathbb{R}^N))}.
\end{aligned}
$$

La convergence de $f * \rho_n$ vers $f$ est une conséquence immédiate de cette inégalité et du lemme 1.8.1. ∎

### 1.8.4 Le cas des Espaces de Sobolev

Un autre cas intéressant est celui où $E$ est un espace de Sobolev.

**Proposition 1.8.2** *Soit $1 \leq p < +\infty$ et $1 \leq q < +\infty$. Les deux assertions sont équivalentes:*
*i) $f \in L^p(U; W^{1,q}(\Omega))$.*
*ii) $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(U \times \Omega)$, vérifie*

$$
\int_U \left( \int_\Omega |f|^q \, d\lambda_N \right)^{p/q} d\lambda_s < +\infty
$$

*et, pour* $i = 1, \ldots, N$, $D_{y_i} f \in L^1_{\mathrm{loc}}(U \times \Omega)$ *et vérifie*

$$\int_U \left( \int_\Omega |D_{y_i} f|^q \, d\lambda_N \right)^{p/q} d\lambda_s < +\infty.$$

*Dans ce cas on a, pour* $\lambda_s$*-presque tout* $x \in U$, $D_i f(x, \cdot) = D_{y_i} f(x, \cdot)$ $\lambda_N$*-presque partout sur* $\Omega$.

Remarques:

1) $D_{y_i} f$ représente la dérivée dans la direction $y_i$ au sens des distributions dans $U \times \Omega$ de $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(U \times \Omega)$; $D_i f(x, \cdot)$ représente la dérivée dans la direction $i$ au sens des distributions dans $\Omega$ de $f(x, \cdot) \in W^{1,q}(\Omega)$.

2) Une condition similaire à ii) peut aussi être écrite dans le cas $p = +\infty$.

3) On peut généraliser ce résultat aux espaces $W^{k,q}(\Omega)$, pour $k \geq 2$.

Démonstration:
$\diamondsuit$ Etape 1: sens i) $\Rightarrow$ ii).
La première partie de ii) découle de la proposition précédente, car $f \in L^p(U; L^q(\Omega))$. De plus, comme $D_i : W^{1,q}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ est linéaire continue, $D_i f \in L^p(U; L^q(\Omega))$ et, pour conclure cette étape, il suffit donc de constater que la dérivée de $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(U \times \Omega)$ dans la direction $y_i$ au sens des distributions sur $U \times \Omega$ est la fonction $D_i f \in L^1_{\mathrm{loc}}(U \times \Omega)$.
Pour voir cela, prenons $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$: par définition de $D_i f(x, \cdot)$, pour presque tout $x \in U$, on a

$$\int_\Omega f(x,y) \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(y) \, dy \quad = \quad - \int_\Omega D_i f(x,y) \varphi(y) \, dy,$$

donc, pour tout $\gamma \in \mathcal{D}(U)$, en multipliant cette égalité par $\gamma$ puis en intégrant sur $U$ (les fonctions considérées sont alors, puisque $\gamma$ et $\varphi$ sont à supports compacts, dans $L^1(U \times \Omega)$ et on peut appliquer le théorème de Fubini):

$$\int_{U \times \Omega} f(x,y) \gamma(x) \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(y) \, dx \, dy \quad = \quad - \int_{U \times \Omega} D_i f(x,y) \gamma(x) \varphi(y) \, dx \, dy.$$

Par linéarité, on obtient pour tous $(\gamma_1, \ldots, \gamma_k) \in \mathcal{D}(U)$ et $(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_{U \times \Omega} f(x,y) \sum_{j=1}^k \gamma_j(x) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i}(y) \, dx \, dy \quad = \quad - \int_{U \times \Omega} D_i f(x,y) \sum_{j=1}^k \gamma_j(x) \varphi_j(y) \, dx \, dy. \tag{1.8.7}$$

Mais (cf Annexe D.1) pour tout $\psi \in \mathcal{D}(U \times \Omega)$, il existe un compact $K$ de $U \times \Omega$ et des fonctions $(\gamma_1^{(n)}, \ldots, \gamma_{k_n}^{(n)}) \in \mathcal{D}(U)$ et $(\varphi_1^{(n)}, \ldots, \varphi_{k_n}^{(n)}) \in \mathcal{D}(\Omega)$, tels que $(x,y) \to \sum_{j=1}^{k_n} \gamma_j^{(n)}(x) \varphi_j^{(n)}(y)$ soient à supports dans $K$ et vérifient

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k_n} \gamma_j^{(n)} \varphi_j^{(n)} \quad &\stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} \quad \psi \text{ uniformément sur } U \times \Omega \\ \sum_{j=1}^{k_n} \gamma_j^{(n)} \frac{\partial \varphi_j^{(n)}}{\partial y_i} \quad &\stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y_i} \text{ uniformément sur } U \times \Omega. \end{aligned}$$

En passant donc à la limite dans (1.8.7) lorsque $n \to \infty$ (par le théorème de convergence dominée, les fonctions $\sum_{j=1}^{k_n} \gamma_j^{(n)} \varphi_j^{(n)}$ étant à supports dans un compact $K$ fixé et $(f, D_i f) \in L^1(K)$), on obtient pour tout $\psi \in \mathcal{D}(U \times \Omega)$

$$\int_{U \times \Omega} f(x,y) \frac{\partial \psi}{\partial y_i}(x,y) \, dx \, dy = - \int_{U \times \Omega} D_i f(x,y) \psi(x,y) \, dx \, dy,$$

ce qui donne bien $D_{y_i} f = D_i f$ dans $\mathcal{D}'(U \times \Omega)$.
$\diamondsuit$ Etape 2: sens ii) $\Rightarrow$ i).

On sait déjà, par la proposition précédente, que $f \in L^p(U; L^q(\Omega))$ et que $D_{y_i}f \in L^p(U; L^q(\Omega))$.
Admettons un instant que l'on ait montré que, pour $\lambda_s$-presque tout $x \in U$, la fonction $D_{y_i}f(x,\cdot) \in L^q(\Omega)$ est la dérivée de $f(x,\cdot) \in L^q(\Omega)$ dans la direction $i$ au sens des distributions sur $\Omega$. On saura alors que, pour $\lambda_s$-presque tout $x \in U$, $f(x,\cdot) \in W^{1,q}(\Omega)$. De plus, pour tout $d \in W^{1,q}(\Omega)$ et tout $i \in [1,N]$, les applications $(x,y) \in U \times \Omega \to |f(x,y) - d(y)|^q$ et $(x,y) \in U \times \Omega \to |D_{y_i}f(x,y) - D_i d(y)|^q$ sont positives et mesurables par rapport à leurs deux arguments, donc, par Fubini-Tonelli,

$$H_1(x) = \int_\Omega |f(x,y) - d(y)|^q \, d\lambda_N(y) \text{ et } H_{2,i}(x) = \int_\Omega |D_{y_i}f(x,y) - D_i d(y)|^q \, d\lambda_N(y)$$

sont mesurables. En munissant $W^{1,q}(\Omega)$ de la norme

$$|| \cdot ||_{W^{1,q}(\Omega)} = || \cdot ||_{L^q(\Omega)} + \sum_{j=1}^N ||D_i \cdot ||_{L^q(\Omega)},$$

on constate que $||f(x,\cdot) - d(\cdot)||_{W^{1,q}(\Omega)} = H_1(x)^{1/q} + \sum_{i=1}^N H_{2,i}(x)^{1/q}$: l'application $x \in U \to ||f(x,\cdot) - d(\cdot)||_{W^{1,q}(\Omega)} \in \mathbb{R}^+$ est donc mesurable; puisque cela est vrai pour tout $d \in W^{1,q}(\Omega)$, et comme $W^{1,q}(\Omega)$ est séparable et $\lambda_s$ est $\sigma$-finie, on obtient la $\mu$-mesurabilité de $f : U \to W^{1,q}(\Omega)$. La traduction des deux inégalités de ii) nous dit alors que

$$||f(x,\cdot)||_{W^{1,q}(\Omega)} = ||f(x,\cdot)||_{L^q(\Omega)} + \sum_{i=1}^N ||D_{y_i}f(x,\cdot)||_{L^q(\Omega)} \in L^p(U),$$

c'est à dire que $f \in L^p(U; W^{1,q}(\Omega))$.
Il suffit donc de montrer que $D_i f(x,\cdot)$ est, pour $\lambda_s$-presque tout $x \in U$, $D_{y_i}f(x,\cdot)$. Prenons $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\gamma \in \mathcal{D}(U)$: comme $\gamma\varphi \in \mathcal{D}(U \times \Omega)$, on a

$$\int_{U\times\Omega} f(x,y)\gamma(x)\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}(y)\,dx\,dy = -\int_{U\times\Omega} D_{y_i}f(x,y)\gamma(x)\varphi(y)\,dx\,dy.$$

Mais $(f, D_{y_i}f) \in L^1_{\mathrm{loc}}(U \times \Omega)$ donc, en utilisant le théorème de Fubini, on trouve

$$\int_U \gamma(x)\left(\int_\Omega f(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}(y)\,dy\right)dx = \int_U \gamma(x)\left(-\int_\Omega D_{y_i}f(x,y)\varphi(y)\,dy\right)dx. \tag{1.8.8}$$

De plus, pour tout compact $K$ de $U$, $(f, D_{y_i}f) \in L^1(K; L^q(\Omega))$ et, comme la multiplication par $\varphi$ ou $\partial_i\varphi$ est linéaire continue $L^q(\Omega) \to L^1(\Omega)$, on en déduit que $(f\partial_i\varphi, D_{y_i}f\varphi) \in L^1(K; L^1(\Omega))$; enfin, l'intégrale sur $\Omega$ est linéaire continue $L^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, donc les applications $F_1 : x \to \int_\Omega f(x,y)\partial_i\varphi(y)\,dy$ et $F_2 : x \to -\int_\Omega D_{y_i}f(x,y)\varphi(y)\,dy$ sont dans $L^1(K)$. Ceci étant vrai pour tout compact $K$ de $U$, on en déduit que $(F_1, F_2) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et (1.8.8) nous donne, pour tout $\gamma \in \mathcal{D}(U)$,

$$\int_U \gamma F_1 \, d\lambda_s = \int_U \gamma F_2 \, d\lambda_s.$$

Le lemme fondamental des distributions nous dit alors que $F_1 = F_2$ $\lambda_s$-presque partout sur $U$; il existe donc, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $A_\varphi \subset U$ de $\lambda_s$-mesure nulle tel que, pour tout $x \notin A_\varphi$, on a

$$\int_\Omega f(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}(y)\,dy = -\int_\Omega D_{y_i}f(x,y)\varphi(y)\,dy. \tag{1.8.9}$$

Mais il existe $D \subset \mathcal{D}(\Omega)$ dénombrable vérifiant: pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, il existe $K$ compact de $\Omega$ et $(\varphi_n)_{n\geq1} \in D$ à supports dans $K$ tels que $\varphi_n \to \varphi$ et $\partial_i\varphi_n \to \partial_i\varphi$ uniformément sur $\Omega$ lorsque $n \to \infty$ (cf Annexe D.2). Ainsi, en prenant $A = \cup_{\varphi\in D}A_\varphi$ de $\lambda_s$-mesure nulle ($D$ est dénombrable), $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $(\varphi_n)_{n\geq1} \in D$ qui converge au sens ci-dessus vers $\varphi$, on a, pour tout $x \notin A$ et tout $n \geq 1$,

$$\int_\Omega f(x,y)\frac{\partial\varphi_n}{\partial y_i}(y)\,dy = -\int_\Omega D_{y_i}f(x,y)\varphi_n(y)\,dy$$

et, lorsque l'on passe à la limite $n \to \infty$ (passage à la limite valide car les $\varphi_n$ ont leur supports dans un compact $K$ fixé, et $(f(x,\cdot), D_{y_i}f(x,\cdot)) \in L^q(\Omega) \subset L^1(K)$), on trouve (1.8.9) pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et tout

$x \notin A$. $A$ étant de $\lambda_s$-mesure nulle, on a en fait obtenu: pour $\lambda_s$-presque tout $x \in U$, la dérivée dans la direction $i$ au sens des distributions sur $\Omega$ de $f(x,\cdot) \in L^q(\Omega)$ est $D_{y_i}f(x,\cdot) \in L^q(\Omega)$, c'est à dire ce que l'on voulait. ■

Une application de cette caractérisation, où l'on voit les EDP pointer le bout de leur nez:

**Corollaire 1.8.1** *Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de Stampacchia, i.e. continue sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, de dérivée dans $L^\infty(\mathbb{R})$ et telle que $\varphi(0) = 0$. Si $p \in [1,+\infty]$, $1 \le q < +\infty$ et $u \in L^p(U; W^{1,q}(\Omega))$, alors $\varphi(u) \in L^p(U; W^{1,q}(\Omega))$ et, pour $\lambda_s$-presque tout $x \in U$, $D_i(\varphi(u))(x,\cdot) = \varphi'(u(x,\cdot))D_iu(x,\cdot)$ $\lambda_N$-presque partout sur $\Omega$. Si, de plus, $p < +\infty$, l'application*

$$\left\{\begin{array}{rcl} L^p(U; W^{1,q}(\Omega)) & \longrightarrow & L^p(U; W^{1,q}(\Omega)) \\ u & \longrightarrow & \varphi(u) \end{array}\right.$$

*est continue.*

Démonstration:
On utilise bien sûr la caractérisation ii) de la proposition précédente.
La mesurabilité de $(x,y) \in U\times\Omega \to \varphi(u(x,y))$ découle de la continuité de $\varphi$ et de la mesurabilité de $u$. Les propriétés de $\varphi$ nous montrent que $|\varphi(u(t,x))| \le ||\varphi'||_{L^\infty(\Omega)}|u(t,x)|$: la condition d'intégrabilité de ii) sur $\varphi(u)$ est donc vérifiée. Pour tout $i \in [1,N]$, comme $(u, D_{y_i}u) \in L^1_{\mathrm{loc}}(U\times\Omega)$, on a $D_{y_i}(\varphi(u)) = \varphi'(u)D_{y_i}u \in L^1_{\mathrm{loc}}(U\times\Omega)$; mais $|\varphi'(u)D_{y_i}u| \le ||\varphi'||_{L^\infty(\mathbb{R})}|D_{y_i}u|$ et la condition d'intégrabilité de ii) sur $D_{y_i}(\varphi(u))$ est donc vérifiée. On a donc montré que $\varphi(u) \in L^p(U; W^{1,q}(\Omega))$ et que $D_i(\varphi(u(x,\cdot)) = \varphi'(u(x,\cdot))D_iu(x,\cdot)$.
Pour montrer, lorsque $p < +\infty$, la continuité de $u \in L^p(U; W^{1,q}(\Omega)) \to \varphi(u) \in L^p(U; W^{1,q}(\Omega))$, on prend $u \in L^p(U; W^{1,q}(\Omega))$ et $(u_n)_{n\ge1}$ qui converge vers $u$ dans cet espace. On peut, par le théorème de réciproque partielle de la convergence dominée, extraire une suite $(u_{n_k})_{k\ge1}$ de $(u_n)_{n\ge1}$ telle que, pour $\lambda_s$-presque tout $x \in U$, $u_{n_k}(x) \to u(x)$ dans $W^{1,q}(\Omega)$ et telle qu'il existe $g \in L^p(U)$ vérifiant, pour tout $k \ge 1$, pour $\lambda_s$-presque tout $x \in U$, $||u_{n_k}(x)||_{W^{1,q}(\Omega)} \le g(x)$. Comme l'application

$$\left\{\begin{array}{rcl} W^{1,q}(\Omega) & \longrightarrow & W^{1,q}(\Omega) \\ f & \longrightarrow & \varphi(f) \end{array}\right.$$

est continue et comme il existe $M \ge 0$ tel que, pour tout $f \in W^{1,q}(\Omega)$, $||\varphi(f)||_{W^{1,q}(\Omega)} \le M||f||_{W^{1,q}(\Omega)}$, on a:

- pour $\lambda_s$-presque tout $x \in U$, $\varphi(u_{n_k}(x)) \to \varphi(u(x))$ dans $W^{1,q}(\Omega)$,
- pour tout $k \ge 1$, pour $\lambda_s$-presque tout $x \in U$, $||\varphi(u_{n_k}(x))||_{W^{1,q}(\Omega)} \le Mg(x)$.

Le théorème de convergence dominée nous dit alors que $\varphi(u_{n_k}) \to \varphi(u)$ dans $L^p(U; W^{1,q}(\Omega))$ et on peut donc conclure, par un argument classique, que toute la suite $(\varphi(u_n))_{n\ge1}$ converge vers $\varphi(u)$ dans $L^p(U; W^{1,q}(\Omega))$. ■

En fait, la fin de ce raisonnement est la preuve, dans un cas particulier, du résultat général suivant:

**Lemme 1.8.2** *Soit $X$ un espace mesuré, $p \in [1,\infty[$ et $E$, $F$ des espaces de Banach. On prend $\phi : E \to F$ une application continue telle qu'il existe $C > 0$ et $\theta \in ]0,p]$ vérifiant, pour tout $a \in E$, $||\phi(a)||_F \le C||a||_E^\theta$. Alors l'application*

$$\left\{\begin{array}{rcl} L^p(X;E) & \longrightarrow & L^{\frac{p}{\theta}}(X;F) \\ f & \longrightarrow & \phi(f) \end{array}\right.$$

*est bien définie et continue.*

Démonstration:
On commence par montrer que, lorsque $f : X \to E$ est $\mu$-mesurable, alors $\phi(f) : X \to F$ est aussi $\mu$-mesurable. Pour cela, on prend $(s_n)_{n\ge1} \in S(X;E)$ qui converge $\mu$-presque partout vers $f$; par continuité de $\phi : E \to F$, on constate que $\phi(s_n) \to \phi(f)$ $\mu$-presque partout et, en écrivant, pour $n$ fixé, $s_n = \sum_{i=1}^k a_i\chi_{A_i}$ avec les $(A_i)_{i\in[1,k]}$ deux à deux disjoints, on constate que $\phi(s_n) = \sum_{i=1}^k \phi(a_i)\chi_{A_i} \in S(X;F)$, ce qui prouve la $\mu$-mesurabilité de $\phi(f)$.

Il suffit ensuite de constater que $||\phi(f)||_F^{\frac{p}{\theta}} \leq C^{\frac{p}{\theta}}||f||_E^p \in L^1(X)$ pour voir que $\phi(f)$ est effectivement dans $L^{\frac{p}{\theta}}(X;F)$.
Prenons ensuite $(f_n)_{n\geq 1} \in L^p(X;E)$ qui converge dans cet espace vers $f$; quitte à extraire une suite, on peut supposer que $f_n \to f$ $\mu$-presque partout sur $X$ et qu'il existe $g \in L^p(X)$ telle que $||f_n||_E \leq g$. Par continuité de $\phi$, on a alors $\phi(f_n) \to \phi(f)$ $\mu$-presque partout sur $X$ et, par hypothèse sur $\phi$, $||\phi(f_n)||_F \leq C||f_n||_E^\theta \leq Cg^\theta \in L^{\frac{p}{\theta}}(X)$; le théorème de convergence dominée nous dit alors que $\phi(f_n) \to \phi(f)$ dans $L^{\frac{p}{\theta}}(X;F)$. La seule limite possible des suites extraites de $(\phi(f_n))_{n\geq 1}$ étant, par ce raisonnement, $\phi(f)$, cela prouve bien la continuité de $f \in L^p(X;E) \to \phi(f) \in L^{\frac{p}{\theta}}(X;F)$. ■

Autre application de ce lemme: lorsque $\varphi$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $C > 0$ et $\theta > 0$ vérifiant $|\varphi(s)| \leq C|s|^\theta$, alors, pour $(p,q) \in [\sup(1,\theta),\infty[$, l'application

$$\left\{\begin{array}{rcl} L^p(U;L^q(\Omega)) & \longrightarrow & L^{\frac{p}{\theta}}(U;L^{\frac{q}{\theta}}(\Omega)) \\ u & \longrightarrow & \varphi(u), \end{array}\right.$$

est bien définie et continue.

# Chapitre 2

# Espaces de Sobolev à Valeurs Vectorielles

Dans tout ce qui suit, $E, F, G\ldots$ sont des espaces de Banach. On note leur norme respective par $||\cdot||_E$, $||\cdot||_F$, $||\cdot||_G, \cdots$

## 2.1 Définitions

### 2.1.1 Distributions Vectorielles

**Définitions**

Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ (dans la suite, $I$ sera soit $\mathbb{R}$, soit de la forme $]0,T[$); on note $\mathcal{D}(I)$ ou $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ l'espace des fonctions définies sur $I$, à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et dont le support est compact dans $I$. Lorsque $K$ est un compact de $I$, $k\in\mathbb{N}$ et $\varphi\in\mathcal{D}(I)$, on note

$$\nu_{k,K}(\varphi) = \sup_{0\leq l\leq k\,,\, t\in K} |\varphi^{(l)}(t)|.$$

Il est utile de remarquer que, pour tout compact $K$ de $I$ et tout $k\in\mathbb{N}$, $\nu_{k,K}$ est une semi-norme sur $\mathcal{D}(I)$.

**Définition 2.1.1** *Une distribution vectorielle sur $I$ à valeurs dans $E$ est une application linéaire $T:\mathcal{D}(I)\to E$ vérifiant: pour tout $K$ compact de $I$, il existe $k\in\mathbb{N}$ et $C_K\geq 0$ tel que, pour tout $\varphi\in\mathcal{D}(I)$ à support dans $K$, on a $||T(\varphi)||_E \leq C_K\nu_{k,K}(\varphi)$. On note $\mathcal{D}'(I;E)$ l'espace des distributions sur $I$ à valeurs dans $E$.*

Remarque:

> Comme pour l'intégration à valeurs vectorielles, lorsque l'espace de Banach considéré est $\mathbb{R}$, on l'omet dans les notations; par exemple, $\mathcal{D}'(I)$ désigne $\mathcal{D}'(I;\mathbb{R})$.

Dans la suite, l'action d'une distribution vectorielle $T$ sur une application $\varphi$ est notée $\langle T,\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(I;E),\mathcal{D}(I)}$, ou bien $\langle T,\varphi\rangle_{\mathcal{D}'_E,\mathcal{D}}$ lorsqu'il n'y a pas de confusion possible sur $I$.

**Définition 2.1.2** *Une suite $(T_n)_{n\geq 1}\in\mathcal{D}'(I;E)$ converge au sens des distributions (on dit aussi "converge dans $\mathcal{D}'_E$") vers $T\in\mathcal{D}'(I;E)$ si, pour tout $\varphi\in\mathcal{D}(I)$,*

$$\langle T_n,\varphi\rangle_{\mathcal{D}'_E,\mathcal{D}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle T,\varphi\rangle_{\mathcal{D}'_E,\mathcal{D}} \quad \textit{dans } E.$$

Cette notion correspond bien sûr à la notion de convergence faible d'une suite de fonctions définies sur $\mathcal{D}(I)$ et à valeurs dans $E$.
La "topologie de la convergence faible" (celle d'e.v.t. sur $\mathcal{D}'(I;E)$ donnée par la famille de semi-normes $(P_\varphi)_{\varphi\in\mathcal{D}(I)}$ définies par $P_\varphi(T) = ||\langle T,\varphi\rangle_{\mathcal{D}'_E,\mathcal{D}}||_E$) est séparée; en particulier, cela signifie que si $T_n\to T$ dans $\mathcal{D}'_E$ et $T_n\to\widetilde{T}$ dans $\mathcal{D}'_E$, alors $T=\widetilde{T}$ (ce qui peut se voir sans parler de "topologie séparée": pour toute fonction $\varphi\in\mathcal{D}(I)$, $\langle T,\varphi\rangle_{\mathcal{D}'_E,\mathcal{D}} = \lim_{n\to\infty}\langle T_n,\varphi\rangle_{\mathcal{D}'_E,\mathcal{D}} = \langle\widetilde{T},\varphi\rangle_{\mathcal{D}'_E,\mathcal{D}}$).

**Définition 2.1.3** *La dérivée d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(I;E)$ est la distribution $T' \in \mathcal{D}'(I;E)$ définie par $\langle T', \varphi\rangle_{\mathcal{D}'_E,\mathcal{D}} = -\langle T, \varphi'\rangle_{\mathcal{D}'_E,\mathcal{D}}$.*

**Proposition 2.1.1** *Si $(T_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{D}'(I;E)$ converge au sens des distributions vers $T \in \mathcal{D}'(I;E)$, alors $(T'_n)_{n\geq 1}$ converge au sens des distributions vers $T'$.*

Démonstration:
C'est immédiat puisque, pour $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, on a

$$\langle T'_n, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'_E,\mathcal{D}} = -\langle T_n, \varphi'\rangle_{\mathcal{D}'_E,\mathcal{D}} \longrightarrow -\langle T, \varphi'\rangle_{\mathcal{D}'_E,\mathcal{D}} = \langle T', \varphi\rangle_{\mathcal{D}'_E,\mathcal{D}}.$$

■

**Proposition 2.1.2** *Si $T \in \mathcal{D}'(I;E)$ vérifie $T' = 0$, alors il existe $a \in E$ tel que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(I)$,*

$$\langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'_E,\mathcal{D}} = \left(\int_I \varphi(t)\, dt\right) a.$$

Remarque:

> Avec l'injection de $L^1_{\text{loc}}(I;E)$ dans $\mathcal{D}'(I;E)$ que l'on verra plus loin, cela signifie que $T$ est une fonction constante.

Démonstration:
$T' = 0$ signifie que, pour tout $\psi \in \mathcal{D}(I)$, $\langle T, \psi'\rangle_{\mathcal{D}'_E,\mathcal{D}} = 0$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ tel que $\int_I \varphi(s)\, ds = 0$; en notant $I = ]t_0, t_1[$ ($t_0$ et $t_1$ peuvent être infinis) et en posant $\psi(t) = \int_{t_0}^t \varphi(s)\, ds$, on constate que $\psi$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que, si $[t_2, t_3]$ est un compact dans $I$ contenant le support de $\varphi$, alors $\text{supp}(\psi) \subset [t_2, t_3]$ (car si $t < t_2$, $\varphi_{|]t_0,t]} = 0$ donc $\psi(t) = 0$, et si $t > t_3$, comme $\varphi_{|[t,t_1[} = 0$, $\psi(t) = \int_{t_0}^t \varphi(s)\, ds = \int_I \varphi(s)\, ds = 0$): ainsi, $\psi \in \mathcal{D}(I)$. De plus, comme $\psi' = \varphi$, on a

$$0 = \langle T, \psi'\rangle_{\mathcal{D}'_E,\mathcal{D}} = \langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'_E,\mathcal{D}}.$$

$T$ s'annule donc sur toutes les fonctions dont l'intégrale sur $I$ est nulle.
Soit $w \in \mathcal{D}(I)$ d'intégrale sur $I$ égale à 1; notons $a = \langle T, w\rangle_{\mathcal{D}'_E,\mathcal{D}} \in E$ et, pour $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ quelconque, prenons $\widetilde{\varphi} = \varphi - (\int_I \varphi)w$; $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}(I)$ et $\widetilde{\varphi}$ est d'intégrale nulle sur $I$, donc $\langle T, \widetilde{\varphi}\rangle_{\mathcal{D}'_E,\mathcal{D}} = 0$, soit, par linéarité de $T$,

$$\langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'_E,\mathcal{D}} = \langle T, \left(\int_I \varphi\right) w\rangle_{\mathcal{D}'_E,\mathcal{D}} = \left(\int_I \varphi\right) a,$$

c'est à dire le résultat voulu. ■

**Distributions Vectorielles et Applications Linéaires**
Lorsque $T \in \mathcal{D}'(I;E)$ et $l : E \to F$ est linéaire continue entre espaces de Banach, on définit la distribution $l(T) \in \mathcal{D}'(I;F)$ par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)\,,\ \langle l(T), \varphi\rangle_{\mathcal{D}'_F,\mathcal{D}} = l\left(\langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'_E,\mathcal{D}}\right)$$

(la vérification que $l(T)$ est bien une distribution vectorielle sur $I$ à valeurs dans $F$ est immédiate).
On a alors $l(T)' = l(T')$: en effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, par définition de $l(T)$ et de $l(T')$,

$$\begin{aligned}
\langle (l(T))', \varphi\rangle_{\mathcal{D}'_F,\mathcal{D}} &= -\langle l(T), \varphi'\rangle_{\mathcal{D}'_F,\mathcal{D}} \\
&= l\left(-\langle T, \varphi'\rangle_{\mathcal{D}'_E,\mathcal{D}}\right) \\
&= l\left(\langle T', \varphi\rangle_{\mathcal{D}'_E,\mathcal{D}}\right) \\
&= \langle l(T'), \varphi\rangle_{\mathcal{D}'_F,\mathcal{D}}.
\end{aligned}$$

Lorsque $T_n \to T$ dans $\mathcal{D}'(I;E)$, on a $l(T_n) \to l(T)$ dans $\mathcal{D}'(I;F)$ (c'est immédiat).

L'introduction de l'image par une application linéaire d'une distribution vectorielle est surtout intéressante à cause du résultat (trivial) suivant, qui nous permet de montrer des égalités de distributions vectorielles grâce à des égalités de distributions scalaires.

**Lemme 2.1.1** *Si $(T,S) \in \mathcal{D}'(I;E)$ vérifient, pour tout $l$ dans une partie de $E'$ qui sépare $E$, $l(T) = l(S)$ dans $\mathcal{D}'(I)$, alors $T = S$ dans $\mathcal{D}'(I;E)$.*

Remarque:

> Une partie $\Lambda$ de $E'$ sépare $E$ si, pour tous $(a,b) \in E$, on a
>
> $$(\forall l \in \Lambda\,,\ l(a) = l(b)) \Longrightarrow a = b.$$
>
> En particulier, pour espace de Banach $E$, $E'$ sépare $E$.

DÉMONSTRATION:
Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, on a

$$l\left(\langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'_E,\mathcal{D}}\right) = \langle l(T), \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle l(S), \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = l\left(\langle S, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'_E,\mathcal{D}}\right).$$

Ceci étant vrai pour tout $l$ dans une partie de $E'$ qui sépare $E$, on en déduit que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, $\langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'_E,\mathcal{D}} = \langle S, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'_E,\mathcal{D}}$, i.e. que $T = S$ dans $\mathcal{D}'(I;E)$. ■

On s'en servira en particulier sous la forme suivante: si $(T,S) \in \mathcal{D}'(I;E)$ vérifient, pour tout $l$ dans une partie de $E'$ qui sépare $E$, $(l(T))' = l(S)$ dans $\mathcal{D}'(I)$, alors $T' = S$ dans $\mathcal{D}'(I;E)$.

### 2.1.2 Fonctions $L^1_{\mathrm{loc}}$ et Distributions Vectorielles

**Lemme fondamental des distributions**
La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est notée $\mu$. C'est toujours par rapport à cette mesure que l'on intègre sur des parties de $\mathbb{R}$.
On note, pour $I$ intervalle de $\mathbb{R}$ et $E$ un espace de Banach, $L^1_{\mathrm{loc}}(I;E)$ l'ensemble des applications $\mu$-mesurables $f : I \to E$ telles que, pour tout compact $K$ de $I$, $f \in L^1(K;E)$ (i.e. $f\mathbf{1}_K \in L^1(I;E)$); c'est aussi l'espace des applications $\mu$-mesurables $f : I \to E$ telles que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, $f\varphi \in L^1(I;E)$.
Remarquons que pour tout $p \in [1,+\infty]$ et tout compact $K$ de $I$ on a $L^p(K;E) \subset L^1(K;E)$ ($K$ est de mesure finie); on en déduit que, pour tout $p \in [1,+\infty]$, $L^p(I;E) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(I;E)$.
De plus, si $f : I \to E$ est continue, elle est limite simple de fonctions en escalier à supports compacts (cas particuliers de fonctions simples) et est donc $\mu$-mesurable; de plus, pour tout $K$ compact de $I$, comme $f$ est bornée sur $K$, $f \in L^1(K;E)$. Ainsi $\mathcal{C}^0(I;E) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(I;E)$.

**Lemme 2.1.2** *Si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I;E)$ vérifie:*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)\,,\ \int_I f(t)\varphi(t)\,dt = 0,$$

*alors $f = 0$ presque partout sur $I$.*

Remarque:

> Ce lemme est le lemme fondamental de la théorie des distributions et des espaces de Sobolev; il est aussi valable lorsque $I$ est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ avec $N > 1$.

DÉMONSTRATION:
Il suffit, puisque $I$ est réunion dénombrable de compacts, de montrer que pour tout compact $K$ de $I$ on a $f = 0$ presque partout sur $K$.
Soit donc un tel compact $K$: comme $I$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $K$ est dans $I$, il existe $[a,b] \subset I$ et $\delta > 0$ tels que $K \subset [a+\delta, b-\delta]$ (il suffit de prendre $\delta = d(K, I^c)/2$ et $a = \inf K - \delta$, $b = \sup K + \delta$).
Puisque $[a,b]$ est compact dans $I$, $f \in L^1([a,b];E)$ et la fonction $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to E$ égale à $f$ sur $[a,b]$ et nulle hors de $[a,b]$ est dans $L^1(\mathbb{R};E)$. Prenons $\rho_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une approximation de l'unité telle que, pour tout $k \geq 1$, $\mathrm{supp}(\rho_k) \subset [-1/k, 1/k]$ et notons $f_k = \widetilde{f} * \rho_k$; la suite $(f_k)_{k\geq 1}$ converge vers $\widetilde{f}$ dans $L^1(\mathbb{R};E)$.
Pour $k > 1/\delta$ et $x \in K$, on a alors

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}(t)\rho_k(x-t)\,dt \\ &= \int_a^b f(t)\rho_k(x-t)\,dt. \end{aligned}$$

Mais $t \to \rho_k(x-t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support dans $x+[-1/k,1/k] \subset K+[-\delta,\delta] \subset [a,b]$, compact de $I$, donc

$$\int_a^b f(t)\rho_k(x-t)\,dt = \int_I f(t)\rho_k(x-t)\,dt = 0 \qquad \text{dès que } x \in K.$$

On a montré que, pour tout $k \geq 1/\delta$, $f_{k\,|K} = 0$.
Mais $f_k \to \widetilde{f}$ dans $L^1(\mathbb{R};E)$ donc $f_{k\,|K} \to \widetilde{f}_{|K} = f_{|K}$ dans $L^1(K;E)$; on en déduit que $f_{|K} = 0$ dans $L^1(K;E)$, c'est à dire presque partout sur $K$. ■

Ce lemme va nous permettre d'injecter $L^1_{\text{loc}}(I;E)$ dans $\mathcal{D}'(I;E)$.
Soit

$$T^E \left\{ \begin{array}{rcl} L^1_{\text{loc}}(I;E) & \longrightarrow & \mathcal{D}'(I;E) \\ f & \longrightarrow & T^E_f \text{ définie par } \langle T^E_f, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'_E,\mathcal{D}} = \displaystyle\int_I f(t)\varphi(t)\,dt. \end{array} \right.$$

On vérifie aisément que cette application est bien définie, c'est à dire que $T^E_f \in \mathcal{D}'(I;E)$ pour tout $f \in L^1_{\text{loc}}(I;E)$: en effet, pour tout $K$ compact de $I$ et tout $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ à support dans $K$, on a $||\int_I f\varphi\,d\mu||_E = ||\int_K f\varphi\,d\mu||_E \leq ||f||_{L^1(K;E)}\nu_{0,K}(\varphi)$. De plus, $T^E$ est linéaire et injective (c'est le lemme précédent qui nous donne ce dernier résultat).
On identifie dorénavant $f$ et sa distribution associée $T^E_f$.

Pour tout $l : E \to F$ linéaire continue, on sait que $l(f) \in L^1_{\text{loc}}(I;F)$; on a alors identifié $l(f)$ à la distribution $T^F_{l(f)} \in \mathcal{D}'(I;F)$. Mais, à partir de $f$ identifié à $T^E_f \in \mathcal{D}'(I;E)$, on peut aussi construire la distribution $l(T^E_f) \in \mathcal{D}'(I;F)$. Pour que les identifications de $f$ avec $T^E_f$ et de $l(f)$ avec $T^F_{l(f)}$ soient valides (i.e. faisables simultanément), il faut que l'on ait $l(T^E_f) = T^F_{l(f)}$ (i.e. que $f$, considérée soit comme un élément de $L^1_{\text{loc}}(I;E)$, soit comme un élément de $\mathcal{D}'(I;E)$, ait la même image par $l$ dans ses deux formes).
C'est en effet le cas (et c'est cela qui justifie notre définition de l'image par $l$ d'une distribution vectorielle à valeurs dans $E$): en effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, comme $f\varphi \in L^1(I;E)$, on a

$$\begin{aligned} \langle l(T^E_f), \varphi\rangle_{\mathcal{D}'_F,\mathcal{D}} &= l\left(\int_I f(t)\varphi(t)\,dt\right) \\ &= \int_I l(f(t)\varphi(t))\,dt \\ &= \int_I l(f)(t)\varphi(t)\,dt \\ &= \langle T^F_{l(f)}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'_F,\mathcal{D}}. \end{aligned}$$

La topologie de $L^1_{\text{loc}}(I;E)$ est celle d'espace vectoriel localement convexe définie par les semi-normes $(||\cdot||_{L^1(K;E)})_{K\in\mathcal{K}}$, où $\mathcal{K}$ désigne l'ensemble des compacts non vides de $I$ (en fait, comme $I$ est réunion dénombrable de compacts, cette topologie est celle d'un espace de Fréchet). On constate alors que, si $(f_n)_{n\geq 1} \in L^1_{\text{loc}}(I;E)$ converge vers $f$ dans $L^1_{\text{loc}}(I;E)$ (c'est à dire pour chaque semi-norme $||\cdot||_{L^1(K;E)}$), alors $f_n \to f$ dans $\mathcal{D}'_E$: en effet, si $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ et $K = \text{supp}(\varphi)$, on a

$$\left|\left|\int_I f_n(t)\varphi(t)\,dt - \int_I f(t)\varphi(t)\,dt\right|\right|_E \leq \nu_{0,K}(\varphi)||f_n - f||_{L^1(K;E)} \to 0.$$

Lorsque $p \in [1,+\infty]$, si $(f_n)_{n\geq 1} \in L^p(I;E)$ converge vers $f$ dans $L^p(I;E)$, alors l'inégalité de Hölder nous permet de voir que $f_n \to f$ dans $L^1_{\text{loc}}(I;E)$, donc dans $\mathcal{D}'_E$.

**Dérivée au sens des distributions de fonctions $L^1_{\text{loc}}$**
La dérivée au sens des distributions d'un élément $f$ de $L^1_{\text{loc}}(I;E)$ est la dérivée de $T^E_f$; ce n'est donc, à priori, que la distribution $f' \in \mathcal{D}'(I;E)$ définie par

$$\langle f', \varphi\rangle_{\mathcal{D}'_E,\mathcal{D}} = -\langle f, \varphi'\rangle_{\mathcal{D}'_E,\mathcal{D}} = -\int_I f(t)\varphi'(t)\,dt$$

(on note aussi la dérivée de $f \in L^1_{\text{loc}}(I;E)$ par $\frac{df}{dt}$ ou $f_t$).
Il peut cependant arriver que cette distribution soit dans l'image par $T^E$ de $L^1_{\text{loc}}(I;E)$, c'est à dire qu'il existe $g \in L^1_{\text{loc}}(I;E)$ tel que $f' = T^E_g$, ce qui se traduit par: pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(I)$,

$$-\int_I f(t)\varphi'(t)\,dt = \int_I g(t)\varphi(t)\,dt \quad \text{ dans } E.$$

Comme on a identifié $g$ et $T^E_g$, on identifie alors $g$ et $f'$.

**Dérivée au sens des distributions et dérivée classique**
Fixons $t_0 \in I$ et prenons $g \in \mathcal{C}^0(I;E)$; on constate alors que l'application $t \in I \to \int_{t_0}^t g(s)\,ds$ est dans $\mathcal{C}^1(I;E)$ et a pour dérivée classique $g$ (même calcul que pour l'intégrale à valeurs réelles).
Lorsque l'on prend $h \in \mathcal{C}^1(I;E)$ et que l'on applique la constatation précédente à $g = h'$, on voit que $F(t) = \int_{t_0}^t h'(s)\,ds$ a même dérivée (classique) que $h$ et que, $I$ étant connexe, on a donc

$$h(t) = h(t_0) + \int_{t_0}^t h'(s)\,ds \quad \text{ pour tout } t \in I.$$

Si $h = f\varphi$, avec $f \in \mathcal{C}^1(I;E)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1(I;\mathbb{R})$, comme $h' = f'\varphi + f\varphi'$ (dérivées classiques), on trouve, pour tous $(t_0,t_1) \in I^2$,

$$\int_{t_0}^{t_1} f(s)\varphi'(s)\,ds = f(t_1)\varphi(t_1) - f(t_0)\varphi(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} f'(s)\varphi(s)\,ds,$$

c'est à dire la formule usuelle d'intégration par parties.
En particulier, si $f \in \mathcal{C}^1(I;E)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, en prenant $[t_0,t_1] \subset I$ qui contient le support de $\varphi$, on constate que $\int_I f\varphi'\,d\mu = -\int_I f'\varphi\,d\mu$, c'est à dire que, pour une fonction de $\mathcal{C}^1(I;E)$, dérivées au sens classique et au sens des distributions coincident au travers de $T^E$.

On peut aussi constater que, si $(u,u') \in L^1_{\text{loc}}(I;E)$ et $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I)$, alors $\gamma u \in L^1_{\text{loc}}(I;E)$ et, au sens des distributions, $(\gamma u)' = \gamma' u + \gamma u'$.
En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(I)$,

$$\begin{aligned}\langle \gamma u, \varphi' \rangle_{\mathcal{D}'_E,\mathcal{D}} &= \int_I u(t)(\gamma\varphi')(t)\,dt \\ &= \int_I u(t)(\gamma\varphi)'(t)\,dt - \int_I u(t)\gamma'(t)\varphi(t)\,dt;\end{aligned}$$

comme $\gamma\varphi \in \mathcal{D}(I)$, $\int_I u(\gamma\varphi)'\,d\mu = -\int_I u'\gamma\varphi\,d\mu$, d'où

$$\langle \gamma u, \varphi' \rangle_{\mathcal{D}'_E,\mathcal{D}} = -\int_I (\gamma(t)u'(t) + \gamma'(t)u(t))\varphi(t)\,dt,$$

c'est à dire exactement $(\gamma u)' = \gamma' u + \gamma u'$.

**Fonctions à valeurs dans $E$ de dérivées à valeurs dans $F$**
Soit $E$ et $F$ des espaces de Banach qui s'injectent continuement dans un troisième espace de Banach $G$ (c'est le cas si, par exemple, $E$ et $F$ s'injectent continuement dans un espace vectoriel topologique $\mathcal{V}$, cf. Annexe B.3).
On a alors naturellement $\mathcal{D}'(I;E) \subset \mathcal{D}'(I;G)$, et la dérivée d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(I;E)$ peut être identifiée, au travers de cette injection, à la dérivée de $T$ en tant que distribution à valeurs dans $G$ (cf. Annexe C). Il peut arriver, si $\langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'_G,\mathcal{D}} \in F$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, qu'il existe $S \in \mathcal{D}'(I;F) \subset \mathcal{D}'(I;G)$ tel que, dans $\mathcal{D}'(I;G)$, on ait $T' = S$; on dit alors que $T' \in \mathcal{D}'(I;F)$ (alors que l'on avait $T \in \mathcal{D}'(I;E)$).
Dans le cas où une fonction $f \in L^1_{\text{loc}}(I;E)$, identifiée à un élément de $\mathcal{D}'(I;E)$, a sa dérivée dans $\mathcal{D}'(I;F)$ (au sens ci-dessus) et dans le cas ou cette distribution de $\mathcal{D}'(I;F)$ peut se représenter comme un élément de $L^1_{\text{loc}}(I;F)$, on dit que $f' \in L^1_{\text{loc}}(I;F)$. C'est donc équivalent à dire qu'il existe $g \in L^1_{\text{loc}}(I;F)$ tel que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, on ait

$$-\int_I f\varphi'\,d\mu = \int_I g\varphi\,d\mu \qquad \text{dans } G, \tag{2.1.1}$$

et on identifie alors $f'$ et $g$.

Remarque:

Si on a montré que $f'$ est donnée, dans $\mathcal{D}'(I;E)$, par une fonction $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(I;E)$ et si $g$ est de plus dans $L^1_{\mathrm{loc}}(I;F)$, cela signifie alors que $f' \in L^1_{\mathrm{loc}}(I;F)$. En effet, par définition de la dérivée dans $\mathcal{D}'(I;E)$, l'équation (2.1.1) est valable dans $E$, donc dans $G$ (les fonctions considérées sont intégrables à valeurs dans $E$, qui s'injecte continuement dans $G$, donc leurs intégrales dans $E$ et $G$ coincident, cf proposition B.3.1), ce qui signifie exactement, lorsque $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(I;F)$, que $f' \in L^1_{\mathrm{loc}}(I;F)$ (avec $f' = g$ dans $L^1_{\mathrm{loc}}(I;F)$).

### 2.1.3 Définition des Espaces de Sobolev

Lorsque l'on demande des conditions d'intégrabilité sur $f$ et $f'$ plus fortes que $L^1_{\mathrm{loc}}$, on obtient les espaces de Sobolev.

**Définition 2.1.4** *Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $p \in [1,+\infty]$. On définit l'espace*

$$W^{1,p}(I;E) = \{u \in L^p(I;E) \mid u' \in L^p(I;E)\},$$

*que l'on munit de la norme*

$$||u||_{W^{1,p}(I;E)} = ||u||_{L^p(I;E)} + ||u'||_{L^p(I;E)}.$$

On pourrait aussi définir, moyennant les remarques de la partie précédente, les espaces

$$\widetilde{W}^{1,(p,q)}(I;E,F) = \{u \in L^p(I;E) \mid u' \in L^q(I;F)\},$$

lorsque $E$ et $F$ sont des Banach qui s'injectent continuement dans un troisième espace de Banach; la théorie qui suit pourrait alors être faite avec cette définition, plus générale que la précédente.
Mais ce n'est pas vraiment utile. En effet, les théorèmes essentiels cités ci-après (prolongement, densité et injections compactes) sont construits pour couvrir ce cas de figure, et permettent donc de trouver tous les résultats utiles sur les espaces $\widetilde{W}^{1,(p,q)}(I;E,F)$ (intégration par parties, injections particulières... des exemples sont donnés en section 2.5).

### 2.1.4 Premières Propriétés des Espaces de Sobolev

**Théorème 2.1.1** *Pour tout $p \in [1,+\infty]$, $W^{1,p}(I;E)$ est un espace de Banach.*

DÉMONSTRATION:
Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy dans $W^{1,p}(I;E)$; comme, pour tous $n \geq 1$ et $m \geq 1$, on a $||u_n - u_m||_{L^p(I;E)} \leq ||u_n - u_m||_{W^{1,p}(I;E)}$ et $||u_n' - u_m'||_{L^p(I;E)} \leq ||u_n - u_m||_{W^{1,p}(I;E)}$, les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(u_n')_{n\geq 1}$ sont de Cauchy dans $L^p(I;E)$ et convergent donc dans cet espace; on note $u$ et $v$ leurs limites respectives. Mais la convergence de $(u_n)_{n\geq 1}$ vers $u$ dans $L^p(I;E)$ entraine la convergence dans $\mathcal{D}'(I;E)$, et on a donc $u_n' \to u'$ dans $\mathcal{D}'(I;E)$; or $u_n' \to v$ dans $L^p(I;E)$, donc dans $\mathcal{D}'(I;E)$, ce qui nous donne $u' = v \in L^p(I;E)$.
Ainsi $u \in W^{1,p}(I;E)$ et $||u_n - u||_{W^{1,p}(I;E)} = ||u_n - u||_{L^p(I;E)} + ||u_n' - v||_{L^p(I;E)} \to 0$: la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge dans $W^{1,p}(I;E)$, qui est donc complet. ■

**Proposition 2.1.3** *Si $E$ est séparable et $p < +\infty$, alors $W^{1,p}(I;E)$ est séparable.*

DÉMONSTRATION:
Soit $\mathcal{E} = L^p(I;E) \times L^p(I;E)$ muni de la norme

$$||(u,v)||_{\mathcal{E}} = ||u||_{L^p(I;E)} + ||v||_{L^p(I;E)}.$$

Comme $E$ est séparable et $p < +\infty$, $L^p(I;E)$ est séparable et $\mathcal{E}$ est donc séparable.
Soit $\Theta$ l'application linéaire

$$\Theta \left\{ \begin{array}{rcl} W^{1,p}(I;E) & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ u & \longrightarrow & (u,u'). \end{array} \right.$$

D'après la définition des normes de $W^{1,p}(I;E)$ et de $\mathcal{E}$, $\Theta$ est une isométrie, donc continue. De plus, $\mathcal{E}$ est séparable métrique donc tout sous-ensemble de $\mathcal{E}$, en particulier $Im(\Theta)$, est séparable. Soit $D_0$ dénombrable dense dans $Im(\Theta)$; on constate que $(u,v) \in Im(\Theta)$ si et seulement si $u \in W^{1,p}(I;E)$ et $v = u'$.
Montrons que $D_1 = \{u \in W^{1,p}(I;E) \mid (u,u') \in D_0\}$, qui est en bijection par $\Theta$ avec $D_0$, donc dénombrable, est dense dans $W^{1,p}(I;E)$. Soit $u \in W^{1,p}(I;E)$; comme $(u,u') \in Im(\Theta)$ et $D_0$ est dense dans $Im(\Theta)$, il existe $(u_n,v_n)_{n\geq 1} \in D_0$ qui converge vers $(u,u')$ dans $\mathcal{E}$, c'est à dire: $u_n \in D_1$, $v_n = u'_n$, $u_n \to u$ dans $L^p(I;E)$ et $v_n = u'_n \to u'$ dans $L^p(I;E)$. Ces deux dernières convergences nous disent que $u_n \to u$ dans $W^{1,p}(I;E)$, donc que $D_1$ est dense dans $W^{1,p}(I;E)$. ■

**Proposition 2.1.4** *Si $1 < p < +\infty$ et $E$ est séparable réflexif, alors $W^{1,p}(I;E)$ est réflexif.*

DÉMONSTRATION:
On reprend les notations de la démonstration précédente. Comme $I$ est de mesure $\sigma$-finie, $1 < p < +\infty$ et $E$ est séparable réflexif, on sait que $L^p(I;E)$ est réflexif, donc que $\mathcal{E}$ est réflexif; en particulier, tout sous-espace fermé de $\mathcal{E}$ est réflexif.
De plus, $\Theta$ étant une isométrie et $W^{1,p}(I;E)$ étant complet, $Im(\Theta)$ est complet donc fermé dans $\mathcal{E}$: $Im(\Theta)$ est donc un espace de Banach réflexif. Pour conclure, on constate que, $\Theta$ étant une isométrie, $\Theta : W^{1,p}(I;E) \to Im(\Theta)$ est un isomorphisme; ainsi, puisque $Im(\Theta)$ est réflexif, $W^{1,p}(I;E)$ est réflexif.
■

## 2.2 Injection Continue

On note $\mathcal{C}_b^0(I;E)$ l'espace des applications continues bornées $I \to E$; c'est un espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme

$$||u||_{\mathcal{C}_b^0(I;E)} = \sup_{t\in I} ||u(t)||_E.$$

On note $\mathcal{C}^{0,0}(I;E)$ le sous-espace (fermé) de $\mathcal{C}_b^0(I;E)$ formé des applications uniformément continues et bornées sur $I$. Le théorème de prolongement des applications uniformément continues nous dit que toute application de $\mathcal{C}^{0,0}(I;E)$ se prolonge de manière unique en une application uniformément continue sur $\overline{I}$, et on peut donc considérer toute application de $\mathcal{C}^{0,0}(I;E)$ comme une application continue $\overline{I} \to E$.

Enfin, lorsque $\alpha \in ]0,1]$, on définit l'espace des fonctions Höldériennes d'exposant $\alpha$ par

$$\mathcal{C}^{0,\alpha}(I;E) = \{u \in \mathcal{C}_b^0(I;E) \mid \exists C > 0 \text{ tel que } \forall (t,t') \in I^2\,,\ ||u(t)-u(t')||_E \leq C|t-t'|^\alpha\},$$

que l'on munit de la norme

$$||u||_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(I;E)} = ||u||_{\mathcal{C}_b^0(I;E)} + \sup_{(t,t')\in I^2\,,\ t\neq t'} \frac{||u(t)-u(t')||_E}{|t-t'|^\alpha}.$$

C'est bien un espace de Banach, et toutes les fonctions de $\mathcal{C}^{0,\alpha}(I;E)$ sont uniformément continues sur $I$; on peut donc considérer toute fonction Höldérienne comme une fonction continue $\overline{I} \to E$.

**Lemme 2.2.1** *Si $u \in W^{1,p}(I;E)$, alors $u$ est continue sur $I$ et on a, pour tout $(t_0,t) \in I^2$,*

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t u'(s)\,ds.$$

Remarque:

Comme $u' \in L^p(I;E) \subset L^1_{\text{loc}}(I;E)$, l'intégrale ci-dessus a bien un sens.

DÉMONSTRATION:
Soit $g(t) = \int_{t_0}^t u'(s)\,ds$.

Comme $u' \in L^1_{\text{loc}}(I;E)$, $g$ est continue: si $t_n \to t_\infty \in I$, alors, pour $n$ assez grand, $t_n$ reste dans un compact $[T_0, T_1]$ de $I$ et

$$||g(t_n) - g(t_\infty)||_E = \left|\left|\int_{t_\infty}^{t_n} u'(s)\,ds\right|\right|_E \leq \left|\int_{t_\infty}^{t_n} ||u'(s)||_E\,ds\right| \to 0,$$

par le théorème de convergence dominée, puisque $u' \in L^1([T_0,T_1];E)$.
On a donc $g \in L^1_{\text{loc}}(I;E)$ et on peut calculer la dérivée de $g$ dans $\mathcal{D}'(I;E)$: si $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, par le théorème de Fubini et en notant $I = ]\alpha, \beta[$ ($\alpha$ et $\beta$ peuvent être infinis),

$$\begin{aligned}
\langle g', \varphi\rangle_{\mathcal{D}'_E,\mathcal{D}} &= -\int_I g(t)\varphi'(t)\,dt \\
&= -\int_{t_0}^{\beta}\left(\int_I \mathbf{1}_{[t_0,t]}(s)u'(s)\varphi'(t)\,ds\right)dt \\
&\quad -\int_{\alpha}^{t_0}\left(\int_I -\mathbf{1}_{[t,t_0]}(s)u'(s)\varphi'(t)\,ds\right)dt \\
&= -\int_{t_0}^{\beta} u'(s)\left(\int_s^{\beta}\varphi'(t)\,dt\right)ds + \int_{\alpha}^{t_0} u'(s)\left(\int_{\alpha}^{s}\varphi'(t)\,dt\right)ds \\
&= \int_{t_0}^{\beta} u'(s)\varphi(s)\,ds + \int_{\alpha}^{t_0} u'(s)\varphi(s)\,ds = \int_I u'(s)\varphi(s)\,ds,
\end{aligned}$$

donc $g' = u'$. Ainsi, $(u-g)' = 0$ et on sait que cela implique: $\exists a \in E$ tel que $u = a + g$ dans $\mathcal{D}'(I;E)$, donc presque partout (ce sont des fonctions de $L^1_{\text{loc}}(I;E)$).
Mais $g$ est continue, donc $u$ est (égale presque partout à) une fonction continue et on a bien $u(t) = a + \int_{t_0}^t u'(s)\,ds$, avec $a = u(t_0) - \int_{t_0}^{t_0} u'(s)\,ds = u(t_0)$. ■

**Théorème 2.2.1** *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, $W^{1,p}(I;E)$ s'injecte continuement dans $\mathcal{C}^{0,1-1/p}(I;E)$.*

Remarques:

1) "$W^{1,p}(I;E)$ s'injecte continuement dans $\mathcal{C}^{0,1-1/p}(I;E)$", signifie que toute fonction de $W^{1,p}(I;E)$ est (presque partout égale à) une fonction de $\mathcal{C}^{0,1-1/p}(I;E)$ et qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $u \in W^{1,p}(I;E)$, on a
$$||u||_{\mathcal{C}^{0,1-1/p}(I;E)} \leq C||u||_{W^{1,p}(I;E)},$$
i.e. que "l'identité" $W^{1,p}(I;E) \to \mathcal{C}^{0,1-1/p}(I;E)$ est continue. On note alors $W^{1,p}(I;E) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,1-1/p}(I;E)$.

2) Toute fonction de $W^{1,p}(I;E)$ étant alors continue sur $\overline{I}$, on peut passer à la limite dans le lemme précédent lorsque $t_0$ tend vers une extrémité (finie) de $I$; par exemple, si $I = ]\alpha,\beta[$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u \in W^{1,p}(\alpha,\beta;E)$, on a pour tout $t \in [\alpha,\beta[$,
$$u(t) = u(\alpha) + \int_{\alpha}^{t} u'(s)\,ds$$
(on utilise aussi la convergence dominée sur $u' \in L^p(\alpha,\beta;E) \subset L^1(\alpha,t;E)$ pour tout $t \in ]\alpha,\beta[$). Si $\beta$ est aussi fini, on peut encore écrire ceci pour $t = \beta$.

3) La démonstration montre quelque chose de plus: lorsque $p < +\infty$, toute fonction de $W^{1,p}(I;E)$ tend vers 0 aux extrémités infinies de $I$. On en déduit que, pour $u \in W^{1,1}(-\infty,\beta;E)$, en passant à la limite comme dans la remarque précédente, on a
$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} u'(s)\,ds,$$
pour tout $t \in ]-\infty,\beta[$.

Démonstration:

$\diamondsuit$ Etape 1: On commence par un lemme d'intégration, qui est en fait un exercice classique: si $I$ est un intervalle non-borné, $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p(I)$ est uniformément continue et positive, alors $f$ tend vers 0 aux extrémités infinies de $I$.

On raisonne par l'absurde, en supposant (par exemple avec $I$ non minoré) que $f(t) \not\to 0$ lorsque $t \to -\infty$; il existerait alors $\varepsilon > 0$ et une suite $t_n \to -\infty$ tels que, pour tout $n \geq 1$, $f(t_n) \geq 2\varepsilon$; quitte à extraire une suite de $(t_n)_{n\geq 1}$ (qui, rappelons-le, tend vers $-\infty$), on peut supposer que, pour tout $n \geq 1$, $t_{n+1} < t_n - 2$. En traduisant l'uniforme continuité de $f$, on trouve un $\delta \in ]0, 1[$ tel que, dès que $|s - r| < \delta$, on a $|f(s) - f(r)| < \varepsilon$. Ainsi, sur chaque intervalle $J_n = ]t_n - \delta, t_n + \delta[$, on a $f \geq \varepsilon$. Mais la suite $(t_n)_{n\geq 1}$ et $\delta$ ont étés choisis de telle sorte que les intervalles $(J_n)_{n\geq 1}$ soient deux à deux disjoints: on obtient alors

$$\int_I f^p(t)\,dt \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{J_n} f^p(t)\,dt \geq \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^p = +\infty,$$

c'est à dire une contradiction avec l'intégrabilité de $f^p$.

$\diamondsuit$ Etape 2: Démonstration dans le cas $p < +\infty$.

On sait que pour tous $(t, t') \in I^2$, $u(t) = u(t') + \int_{t'}^t u'(s)\,ds$.

Lorsque $p = 1$, puisque $||u'||_E \in L^1(I)$, on sait que

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall A \subset I\,,\ \mu(A) < \delta \Longrightarrow \int_A ||u'(s)||_E\,ds < \varepsilon,$$

donc, en prenant $(t, t') \in I^2$ tels que $|t - t'| < \delta$, on a $||u(t) - u(t')||_E \leq \int_{[t,t']} ||u'(s)||_E\,ds < \varepsilon$ et $u$ est uniformément continue sur $I$.

Lorsque $p > 1$, par l'inégalité de Hölder entre $p$ et $p/(p-1)$, on a

$$||u(t) - u(t')||_E \leq \int_{[t',t]} ||u'(s)||_E\,ds \leq |t - t'|^{1-1/p} ||u'||_{L^p(I;E)}. \tag{2.2.1}$$

Cela montre que $u$ est aussi uniformément continue sur $I$.

Dans ces deux cas $p = 1$ et $p > 1$, on peut donc considérer $u$ comme une application continue sur $\overline{I}$, qui tend vers 0 aux extrémités infinies de $I$ (étape 1). $u$ est donc continue bornée sur $I$ et on a bien $u \in \mathcal{C}^{0,1-1/p}(I; E)$ (dans le cas $p > 1$, on se sert de (2.2.1)).

Il existe de plus $t_0 \in \overline{I}$ tel que $||u(t_0)||_E = ||u||_{\mathcal{C}_b^0(I;E)}$; en effet, si $I$ est borné, comme $u \in \mathcal{C}^0(\overline{I}; E)$, $u$ atteint son maximum sur $\overline{I}$ compact et, si $I$ est non borné, comme $u(t) \to 0$ lorsque $|t| \to \infty$, il existe $T > 0$ tel que, pour tout $|t| \geq T$, $t \in I$, on a $||u(t)||_E \leq ||u||_{\mathcal{C}_b^0(I;E)}/2$ et on se ramène à $I$ borné en considérant $I \cap ] - T, T[$ (car $||u||_{\mathcal{C}_b^0(I;E)} = ||u||_{\mathcal{C}_b^0(I\cap]-T,T[;E)}$).

$u$ est continue en $t_0$ et on a donc, puisque $u' \in L^p(I; E) \subset L^1([t, t_0]; E)$ pour tout $t \in I$, en passant à la limite dans l'expression $u(t') = u(t) + \int_t^{t'} u'(s)\,ds$ lorsque $t' \to t_0$,

$$u(t_0) = u(t) + \int_t^{t_0} u'(s)\,ds. \tag{2.2.2}$$

Soit $r \in ]0, \inf(1, \mu(I)/2)[$: quelle que soit la position de $t_0$ dans $\overline{I}$, un des deux intervalles $]t_0, t_0 + r[$ ou $]t_0 - r, t_0[$ est contenu dans $I$; notons-le $J$: il est de longueur $r$ indépendante de $t_0$ (donc de $u$).

On a, par (2.2.2), $||u||_{\mathcal{C}_b^0(I;E)} \leq ||u(t)||_E + \int_J ||u'(s)||_E\,ds$ pour tout $t \in J$. En intégrant cette dernière inégalité sur $J$, on trouve

$$||u||_{\mathcal{C}_b^0(I;E)} \leq \frac{1}{r} ||u||_{L^1(J;E)} + ||u'||_{L^1(J;E)} \leq r^{-1/p} ||u||_{L^p(I;E)} + r^{1-1/p} ||u'||_{L^p(I;E)}.$$

On en déduit (avec (2.2.1) lorsque $p > 1$) que l'injection de $W^{1,p}(I; E)$ dans $\mathcal{C}^{0,1-1/p}(I; E)$ est continue.

$\diamondsuit$ Etape 3: Démonstration dans le cas $p = +\infty$.

Si $u \in W^{1,\infty}(I; E)$, pour tout $(t, t') \in I^2$, on a

$$||u(t) - u(t')||_E = \left|\left| \int_{t'}^t u'(s)\,ds \right|\right|_E \leq ||u'||_{L^\infty(I;E)} |t - t'|,$$

et $u$ est donc $||u'||_{L^\infty(I;E)}$-lipschitzienne sur $I$. Comme $u \in L^\infty(I;E)$, on en déduit que $u$ est continue bornée sur $I$, et que $u$ est donc dans $\mathcal{C}^{0,1}(I;E)$. Enfin, on conclut en constatant que

$$||u||_{\mathcal{C}^{0,1}(I;E)} \leq ||u||_{L^\infty(I;E)} + ||u'||_{L^\infty(I;E)} = ||u||_{W^{1,\infty}(I;E)},$$

i.e. que l'injection de $W^{1,\infty}(I;E)$ dans $\mathcal{C}^{0,1}(I;E)$ est continue. ∎

## 2.3 Prolongement, Densité

### 2.3.1 Prolongement

Pour $T > 0$, $\mathcal{C}^\infty([0,T];E)$ désigne l'ensemble des restrictions à $[0,T]$ de fonctions dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};E)$.

**Lemme 2.3.1** *Si $T > 0$, $1 \leq p < +\infty$ et $D$ est une partie dense de $E$, alors $\{\sum_{\text{finie}} d_i\varphi_i\,,\ d_i \in D\,,\ \varphi_i \in \mathcal{C}^\infty([0,T])\}$ est dense dans $W^{1,p}(0,T;E)$; en particulier, $\mathcal{C}^\infty([0,T];E)$ est dense dans $W^{1,p}(0,T;E)$.*

Démonstration:
Soit $u \in W^{1,p}(0,T;E) \subset \mathcal{C}([0,T];E)$; on sait, puisque $u' \in L^p(0,T;E)$, qu'il existe une suite $v_n \in \{\sum_{finie} d_i\varphi_i\,,\ d_i \in D\,,\ \varphi_i \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,T[)\}$ qui converge vers $u'$ dans $L^p(0,T;E)$; de plus, il existe $d_n \in D$ qui converge vers $u(0)$ dans $E$. Soit $u_n(t) = d_n + \int_0^t v_n(s)\,ds \in \mathcal{C}^\infty([0,T];E)$. On a $u_n' = v_n \to u'$ dans $L^p(]0,T[;E)$, donc en particulier dans $L^1(]0,T[;E)$; ainsi, $\int_0^\cdot v_n(s)\,ds \to \int_0^\cdot u'(s)\,ds$ dans $\mathcal{C}_b^0([0,T];E)$ et $u_n(\cdot) \to u(0) + \int_0^\cdot u'(s)\,ds = u(\cdot)$ dans $\mathcal{C}_b^0([0,T];E)$, donc dans $L^p(0,T;E)$. On a prouvé la convergence de $u_n$ vers $u$ dans $W^{1,p}(0,T;E)$, c'est à dire la densité souhaitée. ∎

**Proposition 2.3.1** *Soit $E$ un Banach et $u \in L^1(0,T;E)$. En définissant $\widetilde{u} \in L^1(-T,2T;E)$ par*

$$\widetilde{u}\left\{\begin{array}{rcl} ]-T,2T[ & \longrightarrow & E \\ t & \longrightarrow & \left\{\begin{array}{ll} u(-t) & si\ t \in ]-T,0[, \\ u(t) & si\ t \in [0,T], \\ u(2T-t) & si\ t \in ]T,2T[, \end{array}\right. \end{array}\right.$$

*on a:*

*i) si $p \in [1,+\infty]$ et $u \in L^p(0,T;E)$, alors $\widetilde{u} \in L^p(-T,2T;E)$,*

*ii) si $p \in [1,+\infty]$, $F$ est un Banach et $u' \in L^p(0,T;F)$, alors $\widetilde{u}' \in L^p(-T,2T;F)$ avec*

$$\widetilde{u}'(t) = \left\{\begin{array}{ll} -u'(-t) & si\ t \in ]-T,0[, \\ u'(t) & si\ t \in [0,T], \\ -u'(2T-t) & si\ t \in ]T,2T[. \end{array}\right.$$

Remarque:

Bien sûr, on se place dans la situation où les espaces $E$ et $F$ s'injectent continuement dans un même espace vectoriel topologique.

Démonstration:
La fonction $\widetilde{u}$ définit clairement un élément de $L^1(-T,2T;E)$; de même, la première partie du théorème est évidente.
Pour montrer la deuxième partie du théorème, il suffit donc de vérifier que, dans $\mathcal{D}'(-T,2T;G)$ avec $G = E + F$, $\widetilde{u}'$ a l'expression annoncée.
On commence par constater que, puisque $u \in L^1(0,T;E) \subset L^1(0,T;G)$ et $u' \in L^1(0,T;F) \subset L^1(0,T;G)$, on a $u \in W^{1,1}(0,T;G)$.
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(-T,2T)$; prenons $(u_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}^\infty([0,T];G)$ qui converge vers $u$ dans $W^{1,1}(0,T;G)$, donc aussi dans $\mathcal{C}([0,T];G)$. On écrit alors dans $G$, grâce à des intégrations par parties (les fonctions considérées

étant toutes régulières):

$$\begin{aligned}\int_{-T}^{0} u_n(-t)\varphi'(t)\,dt &= u_n(0)\varphi(0) + \int_{-T}^{0} u_n'(-t)\varphi(t)\,dt,\\ \int_{0}^{T} u_n(t)\varphi'(t)\,dt &= u_n(T)\varphi(T) - u_n(0)\varphi(0) - \int_{0}^{T} u_n'(t)\varphi(t)\,dt,\\ \int_{T}^{2T} u_n(2T-t)\varphi'(t)\,dt &= -u_n(T)\varphi(T) + \int_{T}^{2T} u_n'(2T-t)\varphi(t)\,dt.\end{aligned}$$

En passant à la limite $n \to \infty$ dans ces égalités, on constate qu'elles restent vérifiées avec $u$ à la place de $u_n$; en additionnant les relations correspondantes, on trouve alors

$$\int_{-T}^{2T} \widetilde{u}(t)\varphi'(t)\,dt = -\int_{-T}^{2T} \left(-\mathbf{1}_{]-T,0[}(t)u'(-t) + \mathbf{1}_{[0,T]}(t)u'(t) - \mathbf{1}_{]T,2T[}(t)u'(2T-t)\right)\varphi(t)\,dt \quad \text{dans } G, \tag{2.3.1}$$

c'est à dire exactement l'expression recherchée pour $\widetilde{u}'$. ■

**Corollaire 2.3.1** *Soit $E$ un Banach. Il existe une application linéaire continue $P : L^1(0,T;E) \to L^1(\mathbb{R};E)$ telle que, pour tout $u \in L^1(0,T;E)$, $Pu = u$ sur $]0,T[$ et qui vérifie de plus: il existe $C$ ne dépendant que de $T$ tel que:*

*i) pour tout $p \in [1,+\infty]$ et tout espace de Banach $F$, si $u \in L^1(0,T;E) \cap L^p(0,T;F)$, alors $Pu \in L^p(\mathbb{R};F)$ et $||Pu||_{L^p(\mathbb{R};F)} \le C||u||_{L^p(0,T;F)}$,*

*ii) pour tout $p \in [1,+\infty]$ et tout espace de Banach $F$, si $u \in L^1(0,T;E) \cap W^{1,p}(0,T;F)$, alors $Pu \in W^{1,p}(\mathbb{R};F)$ et $||Pu||_{W^{1,p}(\mathbb{R};F)} \le C||u||_{W^{1,p}(0,T;F)}$.*

Un tel opérateur de prolongement sera dit "fort".

Démonstration:
Soit $\gamma \in \mathcal{C}_c^\infty(]-T,2T[)$ qui vaut 1 au voisinage de $[0,T]$ ($\gamma$ ne dépend que de $T$). On pose, avec les notations de la proposition 2.3.1, $Pu = \gamma\widetilde{u}$ (que l'on prolonge par 0 hors de $]-T,2T[$). Clairement, $Pu$ est une fonction de $L^1(\mathbb{R};E)$ qui prolonge $u$ et $u \to Pu$ est linéaire (car $u \to \widetilde{u}$ est linéaire). Tout aussi clairement, on constate que $||Pu||_{L^1(\mathbb{R};E)} \le 3||\gamma||_{L^\infty(\mathbb{R})}||u||_{L^1(0,T;E)}$; l'application $P : L^1(0,T;E) \to L^1(\mathbb{R};E)$ ainsi définie est donc bien linéaire continue.
Pour tout $p \in [1,+\infty]$ et tout Banach $F$, si $u \in L^1(0,T;E) \cap L^p(0,T;F)$, on voit immédiatement que $Pu \in L^p(\mathbb{R};F)$ avec $||Pu||_{L^p(\mathbb{R};F)} \le 3^{1/p}||\gamma||_{L^\infty(\mathbb{R})}||u||_{L^p(0,T;F)} \le 3||\gamma||_{L^\infty(\mathbb{R})}||u||_{L^p(0,T;F)}$.
Soit $p \in [1,+\infty]$, $F$ un Banach et $u \in L^1(0,T;E) \cap W^{1,p}(0,T;F)$. On sait donc que $Pu \in L^p(\mathbb{R};F)$ et, grâce à la proposition 2.3.1, que $\widetilde{u} \in W^{1,p}(-T,2T;F)$ (avec une expression explicite pour $\widetilde{u}'$). Supposons un instant que l'on ait montré que, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R};F)$, $(Pu)'$ est donné par l'extension de la fonction $\gamma'\widetilde{u}+\gamma\widetilde{u}'$ par 0 hors de $]-T,2T[$; on obtient alors $Pu \in W^{1,p}(\mathbb{R};F)$ avec

$$\begin{aligned}||Pu||_{W^{1,p}(\mathbb{R};F)} &= ||Pu||_{L^p(\mathbb{R};F)} + ||(Pu)'||_{L^p(\mathbb{R};F)}\\ &\le 3||\gamma||_{L^\infty(\mathbb{R})}||u||_{L^p(0,T;F)} + ||\gamma'||_{L^\infty(\mathbb{R})}||\widetilde{u}||_{L^p(-T,2T;F)} + ||\gamma||_{L^\infty(\mathbb{R})}||\widetilde{u}'||_{L^p(-T,2T;F)}\\ &\le 3\left(||\gamma||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||\gamma'||_{L^\infty(\mathbb{R})}\right)||u||_{L^p(0,T;F)} + 3||\gamma||_{L^\infty(\mathbb{R})}||u'||_{L^p(0,T;F)}\\ &\le 3\left(||\gamma||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||\gamma'||_{L^\infty(\mathbb{R})}\right)||u||_{W^{1,p}(0,T;F)},\end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration (avec $C = 3\left(||\gamma||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||\gamma'||_{L^\infty(\mathbb{R})}\right)$).
Il faut donc montrer que, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R};F)$, on a $(Pu)' = \gamma'\widetilde{u} + \gamma\widetilde{u}'$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\theta \in \mathcal{D}(]-T,2T[)$ qui vaut 1 au voisinage du support de $\gamma$; on écrit alors

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} Pu(t)\varphi'(t)\,dt &= \int_{\mathbb{R}} \gamma(t)\widetilde{u}(t)\theta(t)\varphi'(t)\,dt\\ &= \int_{\mathbb{R}} \gamma(t)\widetilde{u}(t)(\theta\varphi)'(t)\,dt - \int_{\mathbb{R}} \gamma(t)\widetilde{u}(t)\varphi(t)\theta'(t)\,dt\\ &= \int_{\mathbb{R}} \gamma(t)\widetilde{u}(t)(\theta\varphi)'(t)\,dt\end{aligned}$$

(puisque $\theta' = 0$ là où $\gamma$ est non nulle). Comme $\theta\varphi \in \mathcal{D}(-T, 2T)$ et $(\gamma\widetilde{u})' = \gamma'\widetilde{u} + \gamma\widetilde{u}'$ dans $\mathcal{D}'(-T, 2T; F)$, on en déduit

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} Pu(t)\varphi'(t)\,dt &= -\int_{\mathbb{R}} (\gamma'(t)\widetilde{u}(t) + \gamma(t)\widetilde{u}'(t))\theta(t)\varphi(t)\,dt \\ &= -\int_{\mathbb{R}} (\gamma'(t)\widetilde{u}(t) + \gamma(t)\widetilde{u}'(t))\varphi(t)\,dt\end{aligned}$$

(toujours en utilisant le fait que $\theta$ vaut 1 sur $\mathrm{supp}(\gamma)$), c'est à dire l'expression de $(Pu)'$ recherchée. ■

### 2.3.2 Densité

Lorsque $E$ est un espace de Banach et $v$ est une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $E$, on note $H(v)$ l'extension de $v$ à $\mathbb{R}$ par 0 là où $v$ n'est pas définie.

**Théorème 2.3.1** *Soit $T > 0$ et $(\rho_n)_{n\geq 1}$ une approximation de l'unité sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $n \geq 1$, $\rho_n \in \mathcal{C}_c^\infty(]-T, T[)$. Soit $E$ un espace de Banach. Si $u \in L^1(0, T; E)$, $\widetilde{u} \in L^1(-T, 2T; E)$ est définie comme dans la proposition 2.3.1 et $u_n = (H(\widetilde{u}) * \rho_n)_{|]0,T[}$, alors*

*i) Pour tout $p \in [1, \infty[$ et tout espace de Banach $F$ tel que $u \in L^p(0, T; F)$, on a $u_n \in \mathcal{C}^\infty([0, T]; F)$ et $u_n \to u$ dans $L^p(0, T; F)$ lorsque $n \to \infty$,*

*ii) Pour tout $p \in [1, \infty[$ et tout espace de Banach $F$ tel que $u' \in L^p(0, T; F)$, on a, dans $\mathcal{D}'(0, T; E+F)$, $u_n' = (H(\widetilde{u}') * \rho_n)_{|]0,T[} \in \mathcal{C}^\infty([0, T]; F)$ et $u_n' \to u'$ dans $L^p(0, T; F)$ lorsque $n \to \infty$.*

Remarque:

> Encore une fois, les espaces $E$ et $F$ s'injectent continuement dans un même espace vectoriel topologique.

Démonstration:
Lorsque $u \in L^1(0, T; E)$, $H(\widetilde{u}) \in L^1(\mathbb{R}; E)$ donc $H(\widetilde{u}) * \rho_n$ est bien définie (et c'est une fonction de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; E)$); ainsi, $u_n$ a un sens.
Si $u \in L^p(0, T; F)$ pour un $p \in [1, +\infty[$ et un Banach $F$, alors $H(\widetilde{u}) \in L^p(\mathbb{R}; F)$ (c'est évident) et l'intégrale qui définit $H(\widetilde{u}) * \rho_n$ a la même valeur quand on la considère dans $E$ ou dans $F$; ainsi, $H(\widetilde{u}) * \rho_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; F)$ et $H(\widetilde{u}) * \rho_n \to H(\widetilde{u})$ dans $L^p(\mathbb{R}; F)$, donc $u_n \in \mathcal{C}^\infty([0, T]; F)$ et $u_n \to u$ dans $L^p(0, T; F)$.
Supposons maintenant que $u' \in L^p(0, T; F)$ pour un $p \in [1, +\infty[$ et un Banach $F$. $u_n$ est dans $\mathcal{C}^\infty([0, T]; E)$, donc dans $\mathcal{C}^\infty([0, T]; G)$ avec $G = E + F$; $u_n$ étant régulière, sa dérivée dans $\mathcal{D}'(0, T; G)$ coincide avec sa dérivée classique. De plus, $H(\widetilde{u}') \in L^p(\mathbb{R}; F)$, donc $H(\widetilde{u}')*\rho_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; F)$ et $H(\widetilde{u}')*\rho_n \to H(\widetilde{u}')$ dans $L^p(\mathbb{R}; F)$, ce qui implique $(H(\widetilde{u}') * \rho_n)_{|]0,T[} \to u'$ dans $L^p(0, T; F)$ (au passage, on constate que $(H(\widetilde{u}') * \rho_n)_{|]0,T[} \in \mathcal{C}^\infty([0, T]; F) \subset \mathcal{D}'(0, T; G)$).
Si l'on montre que $u_n' = (H(\widetilde{u}') * \rho_n)_{|]0,T[}$ dans $\mathcal{D}'(0, T; G)$, on en déduit que $u_n' \to u'$ dans $L^p(0, T; F)$. Il suffit donc de montrer cette égalité.
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$; on a, grâce au théorème de Fubini, dans $G$,

$$\begin{aligned}\int_0^T u_n(t)\varphi'(t)\,dt &= \int_0^T \int_{-T}^{2T} \widetilde{u}(s)\rho_n(t-s)\varphi'(t)\,ds\,dt \\ &= \int_{-T}^{2T} \widetilde{u}(s)\left(\int_0^T \rho_n^\vee(s-t)\varphi'(t)\,dt\right) ds \\ &= \int_{-T}^{2T} \widetilde{u}(s)\varphi' * \rho_n^\vee(s)\,ds\end{aligned}$$

(où $\rho_n^\vee(\cdot) = \rho_n(-\cdot)$). Or $\varphi' * \rho_n^\vee = (\varphi * \rho_n^\vee)'$ et $\varphi * \rho_n^\vee \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ a son support dans $\mathrm{supp}(\varphi) + \mathrm{supp}(\rho_n^\vee)$, c'est à dire, vu le choix de $(\rho_n)_{n\geq 1}$, un compact de $]0, T[+]-T, T[\subset]-T, 2T[$; ainsi, par définition de $\widetilde{u}' \in L^p(-T,2T;F) \subset L^p(-T,2T;G)$ (proposition 2.3.1) et de $H(\widetilde{u}')$, on trouve, toujours grâce au théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}
\int_0^T u_n(t)\varphi'(t)\,dt &= -\int_{-T}^{2T} \widetilde{u}'(s)\varphi * \rho_n^\vee(s)\,ds \\
&= -\int_{-T}^{2T}\int_0^T \widetilde{u}'(s)\rho_n(t-s)\varphi(t)\,dt\,ds \\
&= -\int_0^T \varphi(t)\left(\int_{\mathbb{R}} H(\widetilde{u}')(s)\rho_n(t-s)\,ds\right)dt \\
&= -\int_0^T H(\widetilde{u}') * \rho_n(t)\varphi(t)\,dt,
\end{aligned}$$

c'est à dire exactement l'expression annoncée pour $u_n'$. ■

**Corollaire 2.3.2** *Soit $E$, $F$ et $G$ des espaces de Banach s'injectant continuement dans un même espace vectoriel topologique. Soient $(p,q,r) \in [1,\infty[$. Si $u \in L^p(0,T;E)$ est telle que, dans $\mathcal{D}'(0,T;E+F+G)$, $u' = v^{(1)} + v^{(2)}$ avec $v^{(1)} \in L^q(0,T;F)$ et $v^{(2)} \in L^r(0,T;G)$, alors il existe une suite $(u_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}^\infty([0,T],E)$ telle que, pour tout $n \geq 1$, $u_n' = v_n^{(1)} + v_n^{(2)}$ avec $v_n^{(1)} \in \mathcal{C}^\infty([0,T];F)$, $v_n^{(2)} \in \mathcal{C}^\infty([0,T];G)$, et $u_n \to u$ dans $L^p(0,T;E)$, $v_n^{(1)} \to v^{(1)}$ dans $L^q(0,T;F)$ et $v_n^{(2)} \to v^{(2)}$ dans $L^r(0,T;G)$.*

Remarque:

> Une manière plus faible d'écrire ce résultat serait: l'espace $\{u \in \mathcal{C}^\infty([0,T];E) \mid u' \in \mathcal{C}^\infty([0,T];F) + \mathcal{C}^\infty([0,T];G)\}$ est dense dans $\{u \in L^p(0,T;E) \mid u' \in L^q(0,T;F) + L^r(0,T;G)\}$.

Démonstration:
On pose $u_n = (H(\widetilde{u}) * \rho_n)_{|]0,T[}$. Le théorème 2.3.1 nous dit que $u_n \in \mathcal{C}^\infty([0,T];E)$ et que $u_n \to u$ dans $L^p(0,T;E)$.
De plus, puisque $u' \in L^q(0,T;F) + L^r(0,T;G) \subset L^1(0,T;F+G)$ (chacun de ces espaces s'injecte dans $L^1(0,T;F+G)$), le même théorème 2.3.1 nous dit que, dans $\mathcal{D}'(0,T;E+F+G)$, $u_n' = (H(\widetilde{u}') * \rho_n)_{|]0,T[}$.
Mais puisque $u' = v^{(1)} + v^{(2)}$, on a $\widetilde{u}' = V^{(1)} + V^{(2)}$ avec, pour $i \in \{1,2\}$,

$$V^{(i)}(t) = \begin{cases} -v^{(i)}(-t) & \text{si } t \in ]-T,0[, \\ v^{(i)}(t) & \text{si } t \in [0,T], \\ -v^{(i)}(2T-t) & \text{si } t \in ]T,2T[. \end{cases}$$

(cf proposition 2.3.1) et $H(\widetilde{u}') = H(V^{(1)}) + H(V^{(2)})$; ainsi, $u_n' = (H(V^{(1)}) * \rho_n)_{|]0,T[} + (H(V^{(2)}) * \rho_n)_{|]0,T[} = v_n^{(1)} + v_n^{(2)}$.
Or $H(V^{(1)}) \in L^q(\mathbb{R};F)$ et $H(V^{(2)}) \in L^r(\mathbb{R};G)$, donc $v_n^{(1)} \in \mathcal{C}^\infty([0,T];F)$, $v_n^{(2)} \in \mathcal{C}^\infty([0,T];G)$ et $v_n^{(1)} \to v^{(1)}$ dans $L^q(0,T;F)$, $v_n^{(2)} \to v^{(2)}$ dans $L^r(0,T;G)$, ce qui conclut cette preuve. ■

## 2.4 Injection Compacte: théorèmes d'Aubin et de Simon

Le théorèmes d'Aubin et de Simon sont les plus célèbres résultats de compacité faisant intervenir les espaces de Sobolev à valeurs vectorielles et ont une application constante dans la théorie des équations paraboliques non linéaires.
La preuve du résultat de compacité dû à T. Aubin (voir [1]) repose sur des raisonnements d'extraction de suites convergeant faiblement; ce résultat demandait donc la réflexivité des espaces de Banach mis en jeu et des espaces de Sobolev de la forme $W^{1,p}(0,T;F)$ avec $\infty > p > 1$. La technique de convolution utilisée par J. Simon (voir [2]), que nous présentons ici, est un peu plus lourde, mais permet de généraliser les résultats d'Aubin dans les cas non-réflexifs.

Lorsque $V$ est un espace de Banach qui s'injecte compactement dans $E$ (i.e. on a une injection continue $V \hookrightarrow E$ qui est de plus compacte: toute partie bornée dans $V$ est relativement compacte dans $E$), on note $V \overset{c}{\hookrightarrow} E$.

**Théorème 2.4.1** *Soit $1 < p \leq +\infty$ et $1 \leq q \leq +\infty$. Soit $V$, $E$ et $F$ des espaces de Banach tels que $V \overset{c}{\hookrightarrow} E \hookrightarrow F$. Si $A$ est une partie bornée dans $W^{1,p}(0,T;F)$ et dans $L^q(0,T;V)$, alors $A$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}([0,T];F)$ et dans $L^q(0,T;E)$.*

DÉMONSTRATION:
$\diamondsuit$ Etape 1: Relative compacité dans $\mathcal{C}([0,T];F)$.
Comme $\mathcal{C}([0,T];F)$ est complet, il suffit de montrer que $A$ est précompact dans cet espace.
Soit $\rho_k \in \mathcal{C}_c^\infty(]-1/k,1/k[)$ une approximation de l'unité et $P : L^1(0,T;F) \to L^1(\mathbb{R};F)$ un opérateur de prolongement fort; on note, pour $u \in A$, $u_k = ((Pu) * \rho_k)_{|[0,T]}$. Lorsque $u \in A \subset W^{1,p}(0,T;F) \cap L^q(0,T;V)$, on a $Pu \in W^{1,p}(\mathbb{R};F) \cap L^q(\mathbb{R};V)$, donc $u_k \in \mathcal{C}^\infty([0,T];V) \subset \mathcal{C}^\infty([0,T];F)$.
On va montrer, en utilisant le théorème d'Ascoli-Arzela, que, pour tout $k \geq 1$, $A_k = \{u_k \mid u \in A\}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}([0,T];F)$; il est utile de constater que, pour montrer la relative compacité de $A_k$, nous n'avons pas besoin de $p > 1$.
Pour $t \in [0,T]$, comme $u_k(t) = \int_\mathbb{R} Pu(s)\rho_k(t-s)\,ds$,

$$||u_k(t)||_V \leq ||\rho_k||_{L^{q'}(\mathbb{R})}||Pu||_{L^q(\mathbb{R};V)} \leq C||\rho_k||_{L^{q'}(\mathbb{R})}||u||_{L^q(0,T;V)}.$$

On en déduit, puisque $A$ est borné dans $L^q(0,T;V)$, que, pour tout $t \in [0,T]$, $\{u_k(t)\,,\ u \in A\}$ est borné dans $V$, donc relativement compact dans $F$. Vérifions l'équicontinuité de $A_k$: comme les fonctions de $A_k$ sont dans $\mathcal{C}^1([0,T];F)$, il suffit de vérifier que $\{u_k'\,,\ u_k \in A_k\}$ est borné dans $\mathcal{C}([0,T];F)$ par un certain $M_k > 0$ (le théorème des accroissements finis nous permettant d'en déduire que toutes les fonctions de $A_k$ sont $M_k$-lipschitziennes, donc que $A_k$ est équicontinu). Prenons donc $u \in A$: on a, pour tout $t \in [0,T]$, $u_k'(t) = (Pu * \rho_k')(t) = \int_\mathbb{R} Pu(s)\rho_k'(t-s)\,ds$, donc

$$||u_k'(t)||_F \leq ||\rho_k'||_{L^{p'}(\mathbb{R})}||Pu||_{L^p(\mathbb{R};F)} \leq C||\rho_k'||_{L^{p'}(\mathbb{R})}||u||_{L^p(0,T;F)},$$

c'est à dire ce que l'on voulait puisque $A$ est borné dans $L^p(0,T;F)$. Le théorème d'Ascoli-Arzela nous permet de dire que, pour tout $k \geq 1$, $A_k$ est relativement compact dans $\mathcal{C}([0,T];F)$.
On montre ensuite que $\sup_{u\in A}||u_k - u||_{\mathcal{C}([0,T];F)} \to 0$ lorsque $k \to \infty$ (c'est ici que nous utilisons l'hypothèse $p > 1$). Pour voir cela, on prend $u \in A$ et on écrit, pour $t \in [0,T]$ (puisqu'alors $Pu(t) = u(t)$):

$$\begin{aligned} ||u_k(t) - u(t)||_F &= \left|\left|\int_\mathbb{R}(Pu(t-s) - Pu(t))\rho_k(s)\,ds\right|\right|_F \\ &\leq \int_\mathbb{R}||Pu(t-s) - Pu(t)||_F\rho_k(s)\,ds. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $W^{1,p}(\mathbb{R};F) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,1-1/p}(\mathbb{R};F)$, on obtient alors

$$\begin{aligned} ||u_k(t) - u(t)||_F &\leq C_0||Pu||_{W^{1,p}(\mathbb{R};F)}\int_{-1/k}^{1/k}|s|^{1-1/p}\rho_k(s)\,ds \\ &\leq C_1||u||_{W^{1,p}(0,T;F)}(1/k)^{1-1/p}, \end{aligned}$$

ce qui donne finalement

$$\sup_{u\in A}||u_k - u||_{\mathcal{C}([0,T];F)} \leq C_1\sup_{u\in A}||u||_{W^{1,p}(0,T;F)} \times (1/k)^{1-1/p},$$

c'est à dire, puisque $p > 1$, $\sup_{u\in A}||u_k - u||_{\mathcal{C}([0,T];F)} \to 0$ lorsque $k \to \infty$.
On peut maintenant montrer la précompacité de $A$ dans $\mathcal{C}([0,T];F)$. Soit $\varepsilon > 0$ et fixons $k \geq 1$ tel que $\sup_{u\in A}||u_k - u||_{\mathcal{C}([0,T];F)} < \varepsilon/3$. On a donc $A \subset A_k + B_{\mathcal{C}([0,T];F)}(0,\varepsilon/3)$; on sait de plus que $A_k$ est précompact dans $\mathcal{C}([0,T];F)$, donc qu'il existe une partie finie $\{u_k^{(1)},\dots,u_k^{(n)}\}$ de $A_k$ telle que $A_k \subset \bigcup_{i=1}^n B_{\mathcal{C}([0,T];F)}(u_k^{(i)},\varepsilon/3) \subset \bigcup_{i=1}^n B_{\mathcal{C}([0,T];F)}(u^{(i)},2\varepsilon/3)$ (cette dernière inclusion vient de: $\forall i \in [1,n]$, $||u_k^{(i)} - u^{(i)}||_{\mathcal{C}([0,T];F)} < \varepsilon/3$); on en déduit

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n B_{\mathcal{C}([0,T];F)}(u^{(i)},\varepsilon),$$

avec $(u^{(1)},\dots,u^{(n)}) \in A$, c'est à dire la précompacité que l'on souhaitait.

$\diamondsuit$ Etape 2: Relative compacité dans $L^q(0,T;E)$.
On utilise le **lemme**:

*Pour tout $\eta > 0$, il existe $C_\eta > 0$ tel que, pour tout $v \in V$, $||v||_E \le \eta ||v||_V + C_\eta ||v||_F$.*

Pour démontrer ce résultat on raisonne par l'absurde; on suppose donc qu'il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $n \ge 1$, il existe $v_n \in V$ avec $||v_n||_E > \eta ||v_n||_V + n||v_n||_F$. En prenant $w_n = v_n/||v_n||_E$, on a une suite de norme 1 dans $E$ qui vérifie $||w_n||_V \le 1/\eta$ et $||w_n||_F \le 1/n$; $(w_n)_{n\ge1}$ est bornée dans $V$ donc, quitte à extraire une suite, converge dans $E$ (et dans $F$, puisque $E \hookrightarrow F$) vers $w$ de norme 1 dans $E$; mais $w_n \to 0$ dans $F$, donc $w = 0$: c'est une contradiction avec $||w||_E = 1$.
Soit $(u_n)_{n\ge1}$ une suite de $A$: nous allons montrer que l'on peut extraire de $(u_n)_{n\ge1}$ une suite qui converge dans $L^q(0,T;E)$; par l'étape 1, il existe une suite extraite de $(u_n)_{n\ge1}$, encore notée $(u_n)_{n\ge1}$, qui converge dans $\mathcal{C}([0,T];F)$, donc dans $L^q(0,T;F)$; on a alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tous $(n,m) \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} ||u_n - u_m||_{L^q(0,T;E)} &\le \frac{\varepsilon}{4\sup_{u\in A}||u||_{L^q(0,T;V)}} ||u_n - u_m||_{L^q(0,T;V)} + C_\eta ||u_n - u_m||_{L^q(0,T;F)} \\ &\le \varepsilon/2 + C_\eta ||u_n - u_m||_{L^q(0,T;F)} \end{aligned}$$

(on a noté $\eta = \varepsilon/\left(4\sup_{u\in A}||u||_{L^q(0,T;V)}\right)$). Mais $(u_n)_{n\ge1}$ est de Cauchy dans $L^q(0,T;F)$, donc il existe $N \ge 1$ tel que, pour tous $n \ge N$ et $m \ge N$, $||u_n - u_m||_{L^q(0,T;F)} \le \varepsilon/(2C_\eta)$; cela donne, pour tous $n \ge N$ et $m \ge N$, $||u_n - u_m||_{L^q(0,T;E)} \le \varepsilon$ : $(u_n)_{n\ge1}$ est de Cauchy dans $L^q(0,T;E)$ et converge donc dans cet espace. ∎

**Théorème 2.4.2** *Soit $1 \le q < +\infty$. Soit $V$, $E$ et $F$ des espaces de Banach tels que $V \overset{c}{\hookrightarrow} E \hookrightarrow F$. Si $A$ est une partie bornée dans $W^{1,1}(0,T;F)$ et dans $L^q(0,T;V)$, alors $A$ est relativement compacte dans $L^r(0,T;F)$ pour tout $r < +\infty$ et dans $L^q(0,T;E)$.*

Démonstration:
$\diamondsuit$ Etape 1: Relative compacité dans $L^1(0,T;F)$.
Comme $L^1(0,T;F)$ est complet, il suffit de montrer que $A$ est précompact dans cet espace.
En reprenant les notations de la démonstration du théorème 2.4.1, on a vu que $A_k$ est relativement compact dans $\mathcal{C}([0,T];F)$ (dans la démonstration précédente, nous avons remarqué que — pour ce résultat — nous n'avions pas besoin de $p > 1$). Ainsi, puisque $\mathcal{C}([0,T];F) \hookrightarrow L^1(0,T;F)$, $A_k$ est relativement compact dans $L^1(0,T;F)$.
Montrons que $\sup_{u\in A}||u_k - u||_{L^1(0,T;F)} \to 0$ lorsque $k \to \infty$. Pour $u \in A$, on a

$$\begin{aligned} ||u_k - u||_{L^1(0,T;F)} &= \int_0^T \left|\left| \int_{\mathbb{R}} (Pu(t-s) - Pu(t))\rho_k(s)\,ds \right|\right|_F dt \\ &\le \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}} ||Pu(t-s) - Pu(t)||_F \rho_k(s)\,ds \right) dt \\ &\le \int_{-1/k}^{1/k} \left( \int_0^T ||Pu(t-s) - Pu(t)||_F\,dt \right) \rho_k(s)\,ds \\ &\le \sup_{|s|\le 1/k} \int_0^T ||Pu(t-s) - Pu(t)||_F\,dt. \end{aligned}$$

Mais, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $Pu(t-s) - Pu(t) = \int_t^{t-s} (Pu)'(\xi)\,d\xi$ (car $Pu \in W^{1,1}(\mathbb{R};F)$), donc

$$\begin{aligned} \int_0^T ||Pu(t-s) - Pu(t)||_F\,dt &\le \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}} ||(Pu)'(\xi)||_F \mathbf{1}_{]t-s,t[}(\xi)\,d\xi \right) dt \\ &\le \int_{\mathbb{R}} ||(Pu)'(\xi)||_F \left( \int_0^T \mathbf{1}_{]\xi,\xi+s[}(t)\,dt \right) d\xi \\ &\le |s| \int_{\mathbb{R}} ||(Pu)'(\xi)||_F\,d\xi \le C|s|\,||u||_{W^{1,1}(0,T;F)}. \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $u \in A$,

$$||u_k - u||_{L^1(0,T;F)} \le \frac{C}{k} ||u||_{W^{1,1}(0,T;F)}.$$

Puisque $A$ est borné dans $W^{1,1}(0,T;F)$, cette dernière inégalité nous permet de voir que $\sup_{u\in A}||u_k - u||_{L^1(0,T;F)} \to 0$ lorsque $k \to \infty$.
On peut alors achever cette étape: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k \geq 1$ tel que $\sup_{u\in A}||u_k - u||_{L^1(0,T;F)} < \varepsilon/3$; $A_k$ étant précompact dans $L^1(0,T;F)$, il existe $(u^{(i)})_{1\leq i\leq n} \in A$ tels que

$$A_k \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{L^1(0,T;F)}(u_k^{(i)}, \varepsilon/3) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{L^1(0,T;F)}(u^{(i)}, 2\varepsilon/3),$$

ce qui donne $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{L^1(0,T;F)}(u^{(i)}, \varepsilon)$ et la précompacité de $A$ dans $L^1(0,T;F)$ est prouvée.
$\diamondsuit$ Etape 2: Relative compacité dans $L^r(0,T;F)$ pour $r \in ]1,+\infty[$.
Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de $A$; comme $A$ est relativement compact dans $L^1(0,T;F)$, il existe une suite extraite de $(u_n)_{n\geq 1}$, encore notée $(u_n)_{n\geq 1}$, qui converge vers $u$ dans $L^1(0,T;F)$ et, quitte à extraire une autre suite, presque-partout sur $]0,T[$ . Mais $(u_n)_{n\geq 1}$, suite d'éléments de $A$, est bornée dans $W^{1,1}(0,T;F)$, donc dans $\mathcal{C}([0,T];F)$, (i.e. dans $L^\infty(0,T;F)$), et le lemme de compacité $L^p - L^q$ nous permet alors d'affirmer que $u_n \to u$ dans $L^r(0,T;F)$ pour tout $r < +\infty$ (car $]0,T[$ est de mesure finie).
$\diamondsuit$ Etape 3: Relative compacité dans $L^q(0,T;E)$.
On utilise la même astuce que dans la démonstration du théorème 2.4.1: si $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite de $A$, quitte à extraire une suite on peut supposer que $(u_n)_{n\geq 1}$ converge (et est donc de Cauchy) dans $L^q(0,T;F)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut alors écrire

$$\begin{aligned} ||u_n - u_m||_{L^q(0,T;E)} &\leq \frac{\varepsilon}{4\sup_{u\in A}||u||_{L^q(0,T;V)}}||u_n - u_m||_{L^q(0,T;V)} + C_\eta ||u_n - u_m||_{L^q(0,T;F)} \\ &\leq \varepsilon/2 + C_\eta ||u_n - u_m||_{L^q(0,T;F)}. \end{aligned}$$

(où $\eta = \varepsilon/\left(4\sup_{u\in A}||u||_{L^q(0,T;V)}\right)$) et on voit, comme précédemment, que $(u_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans $L^q(0,T;E)$, donc converge dans ce même espace. ■

## 2.5 Quelques Résultats Utiles en EDP

### 2.5.1 Espaces de Sobolev et Applications Linéaires

Commençons par un résultat assez simple, mais déjà assez riche, qui découle des remarques sur l'action des applications linéaires continues sur les distributions vectorielles.

**Proposition 2.5.1** *Soit $1 \leq p \leq +\infty$. Si $l : E \to F$ est linéaire continue alors $l$ induit l'application linéaire continue*

$$\begin{cases} W^{1,p}(0,T;E) & \longrightarrow & W^{1,p}(0,T;F) \\ u & \longrightarrow & l(u), \end{cases}$$

*et on a, pour tout $u \in W^{1,p}(0,T;E)$, $(l(u))' = l(u')$ dans $L^p(0,T;F)$.*

Démonstration:
On sait déjà que l'application induite par $l$ envoie continuement $L^p(0,T;E)$ dans $L^p(0,T;F)$. Dans $\mathcal{D}'(0,T;F)$, on a $(l(u))' = l(u')$ et, comme $u' \in L^p(0,T;E)$, on en déduit que $(l(u))' \in L^p(0,T;F)$, i.e. que $l(u) \in W^{1,p}(0,T;F)$. La continuité de $l : W^{1,p}(0,T;E) \to W^{1,p}(0,T;F)$ découle de la continuité de $l : L^p(0,T;E) \to L^p(0,T;F)$ et de la relation $(l(u))' = l(u')$. ■

Ce résultat nous permet de démontrer des relations très utiles pour obtenir des estimations sur les solutions d'EDP paraboliques.
Par exemple, si $1 \leq p \leq +\infty$, $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $u \in W^{1,p}(0,T;L^1(\Omega))$, on veut montrer que l'on peut écrire (en un certain sens à préciser)

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t,x)\,dx = \int_\Omega \frac{du}{dt}(t,x)\,dx.$$

Avec ce qui précède, c'est très simple: soit $l : E = L^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ l'application linéaire continue définie par $l(f) = \int_\Omega f(x)\,dx$; on sait, puisque $u \in W^{1,p}(0,T;E)$, que $l(u) : t \to \int_\Omega u(t,x)\,dx$ est dans $W^{1,p}(0,T;\mathbb{R})$, et on peut donc parler de sa dérivée comme élément de $L^p(0,T)$; on sait de plus que cette dérivée est $l(u)' = l(u') : t \to \int_\Omega u_t(t,x)\,dx$, ce qui donne la relation voulue ($\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t,x)\,dx$ est une dérivée au sens des distributions dans $]0,T[$ et l'égalité a lieu dans $L^p(0,T)$, i.e. pour presque tout $t \in ]0,T[$).

### 2.5.2 Espaces de Sobolev et Applications Bilinéaires

Le pendant de la partie précédente pour les applications bilinéaires n'est pas aussi simple: il fait appel aux résultats de densité cités plus haut.

**Proposition 2.5.2** *Soit* $(p,q) \in [1,+\infty[$ *et* $1 \le r \le +\infty$ *tels que* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$*. Si* $B : E \times F \to G$ *est bilinéaire continue, alors* $B$ *induit l'application bilinéaire continue*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} W^{1,p}(0,T;E) \times W^{1,q}(0,T;F) & \longrightarrow & W^{1,r}(0,T;G) \\ (u,v) & \longrightarrow & B(u,v). \end{array} \right.$$

*On a de plus, pour tout* $(u,v) \in W^{1,p}(0,T;E) \times W^{1,q}(0,T;F)$,

$$\begin{array}{l} (B(u,v))' = B(u',v) + B(u,v') \ \text{et} \\ \forall (s,t) \in [0,T]^2\,,\ \displaystyle\int_s^t B(u(\tau),\, v'(\tau))\, d\tau = B(u(t),v(t)) - B(u(s),v(s)) - \int_s^t B(u'(\tau),v(\tau))\, d\tau. \end{array}$$

Démonstration:
On sait déjà que l'application induite par $B$ est bilinéaire continue $L^p(0,T;E)\times L^q(0,T;F) \to L^r(0,T;G)$; il suffit donc de montrer la formule de dérivation pour obtenir le résultat souhaité.
Soit $(u_n)_{n\ge 1} \in \mathcal{C}^\infty([0,T];E)$ qui converge vers $u$ dans $W^{1,p}(0,T;E)$ et $(v_n)_{n\ge 1} \in \mathcal{C}^\infty([0,T];F)$ qui converge vers $v$ dans $W^{1,p}(0,T;F)$; on a $B(u_n,v_n) \to B(u,v)$ dans $L^r(0,T;G)$, donc dans $\mathcal{D}'(0,T;G)$, et la dérivée au sens des distributions de $B(u_n,v_n)$ converge donc vers $(B(u,v))'$ dans $\mathcal{D}'(0,T;G)$. Mais, comme $u_n$ et $v_n$ sont régulières (et $B$ est bilinéaire continue), cette dérivée est $B(u_n',v_n)+B(u_n,v_n')$, qui converge donc vers $B(u',v)+B(u,v')$ dans $L^r(0,T;G)$, donc dans $\mathcal{D}'(0,T;G)$. On obtient donc, en égalant les deux limites de $(B(u_n,v_n))'$ dans $\mathcal{D}'(0,T;G)$, $(B(u,v))' = B(u',v)+B(u,v')$.
La formule d'intégration par parties s'obtient en écrivant $B(u,v) \in W^{1,r}(0,T;G)$ comme intégrale de sa dérivée. ■

Ce résultat nous permet aussi de justifier un calcul très fréquent en EDP paraboliques: l'intégration par parties.
Par exemple, si $(u,v) \in H^1(0,T;L^2(\Omega)) := W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))$, en considérant $B : L^2(\Omega)\times L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ bilinéaire continue définie par $B(f,g) = \int_\Omega f(x)g(x)\,dx$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega u(t,x)\frac{dv}{dt}(t,x)\,dx\,dt &= \int_\Omega u(T,x)v(T,x)\,dx - \int_\Omega u(0,x)v(0,x)\,dx \\ &\quad - \int_0^T \int_\Omega \frac{du}{dt}(t,x)v(t,x)\,dx\,dt. \end{aligned}$$

En se souvenant que, lorsque $(f,g) \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, on a $fg \in L^1(0,T;L^1(\Omega)) = L^1(]0,T[\times\Omega)$, on peut aussi remplacer toutes les intégrales $\int_0^T\int_\Omega$ ci-dessus par des intégrales $\int_{]0,T[\times\Omega}$.
On constate aussi, avec $B : L^2(\Omega)\times L^2(\Omega) \to L^1(\Omega)$ définie par $B(f,g) = fg$, que pour toute application $u \in H^1(0,T;L^2(\Omega))$, on a $u^2 \in W^{1,1}(0,T;L^1(\Omega))$ et $\frac{d}{dt}(u^2) = 2u\frac{du}{dt}$.

Mais le théorème de densité cité plus haut comporte bien plus de renseignements que ceux qui ont été utilisés dans la démonstration de la proposition précédente; il peut servir dans des cas plus généraux que ceux décrits ci-dessus.

Par exemple, prenons un espace de Banach $E$ qui s'injecte continuement et densément dans $L^2(\Omega)$ (on peut penser à $E = H^1(\Omega)$); on a alors les inclusions $E \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow E'$. Considérons l'espace $\mathcal{E} = \{u \in L^p(0,T;E) \mid u' \in L^{p'}(0,T;E')\}$ ($p \in ]1,\infty[$) muni de la norme $||u||_{\mathcal{E}} = ||u||_{L^p(0,T;E)} + ||u'||_{L^{p'}(0,T;E')}$; c'est en fait un sous-espace de $W^{1,\inf(p,p')}(0,T;E')$, formé de fonctions à valeurs dans $E \hookrightarrow E'$. On sait donc que ses éléments sont des fonctions continues $[0,T] \to E'$; mais on va en fait prouver plus que cela: toutes les fonctions de $\mathcal{E}$ sont continues $[0,T] \to L^2(\Omega)$ et $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega))$.
Prenons $u \in \mathcal{C}^\infty([0,T];E)$. Lorsque $(f,g) \in E \subset E'$, on a

$$\langle f,g\rangle_{E',E} = \langle f,g\rangle_{L^2(\Omega),L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)\,dx \tag{2.5.1}$$

(définition de l'injection $E \hookrightarrow E'$ au travers de l'identification de $L^2(\Omega)$ avec son dual); ainsi, pour tout $(s,t) \in [0,T]$,

$$\int_s^t \langle u'(\tau), u(\tau)\rangle_{E',E}\, d\tau = \int_s^t \langle u'(\tau), u(\tau)\rangle_{L^2(\Omega),L^2(\Omega)}\, d\tau.$$

Mais $u \in \mathcal{C}^\infty([0,T];L^2(\Omega))$ et $\langle .,.\rangle_{L^2(\Omega),L^2(\Omega)}$ est bilinéaire continue sur $L^2(\Omega)$, donc une intégration par parties (proposition 2.5.2) donne

$$\int_s^t \langle u'(\tau), u(\tau)\rangle_{L^2(\Omega),L^2(\Omega)}\, d\tau = ||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} - ||u(s)||^2_{L^2(\Omega)} - \int_s^t \langle u(\tau), u'(\tau)\rangle_{L^2(\Omega),L^2(\Omega)}\, d\tau.$$

Finalement, on obtient

$$2\int_s^t \langle u'(\tau), u(\tau)\rangle_{E',E}\, d\tau = ||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} - ||u(s)||^2_{L^2(\Omega)},$$

ce qui nous vend la majoration, valable pour tout $(s,t) \in [0,T]$,

$$\begin{aligned} ||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} &\le ||u(s)||^2_{L^2(\Omega)} + 2||u'||_{L^{p'}(0,T;E')}||u||_{L^p(0,T;E)} \\ &\le ||u(s)||^2_{L^p(\Omega)} + 2||u||^2_{\mathcal{E}}. \end{aligned}$$

En prenant la racine carrée de cette inégalité, et en utilisant $\sqrt{a^2+b^2} \le a+b$, on en déduit

$$||u(t)||_{L^2(\Omega)} \le ||u(s)||_{L^2(\Omega)} + \sqrt{2}||u||_{\mathcal{E}},$$

ce qui donne, après intégration par rapport à $s$ sur $[0,T]$ et en utilisant l'injection continue de $E$ dans $L^2(\Omega)$,

$$\begin{aligned} ||u||_{\mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega))} &\le \frac{1}{T}||u||_{L^1(0,T;L^2(\Omega)} + \sqrt{2}||u||_{\mathcal{E}} \\ &\le C||u||_{L^1(0,T;E)} + \sqrt{2}||u||_{\mathcal{E}} \\ &\le CT^{\frac{1}{p'}}||u||_{L^p(0,T;E)} + \sqrt{2}||u||_{\mathcal{E}} \\ &\le C'||u||_{\mathcal{E}}, \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

pour tout $u \in \mathcal{C}^\infty([0,T];E)$, avec $C$ et $C'$ indépendants de $u$.
Soit maintenant $u \in \mathcal{E}$: par le théorème de densité, il existe une suite $(u_n)_{n\ge1} \in \mathcal{C}^\infty([0,T];E) \subset \mathcal{C}^\infty([0,T];E')$ qui converge vers $u$ dans $L^p(0,T;E)$ et dont la suite des dérivées converge vers $u'$ dans $L^{p'}(0,T;E')$, i.e. $(u_n)_{n\ge1}$ converge vers $u$ dans $\mathcal{E}$. Quitte à extraire une suite, on peut aussi supposer, puisque la convergence a aussi lieu dans $L^p(0,T;L^2(\Omega))$, que $u_n(t) \to u(t)$ dans $L^2(\Omega)$ pour presque tout $t \in [0,T]$. Mais (2.5.2) appliqué à $u_n - u_m \in \mathcal{C}^\infty([0,T];E)$ nous dit que

$$||u_n - u_m||_{\mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega))} \le C'||u_n - u_m||_{\mathcal{E}}.$$

Puisque $(u_n)_{n\ge1}$ est de Cauchy dans $\mathcal{E}$ (elle converge vers $u$ dans cet espace), on en déduit que $(u_n)_{n\ge1}$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega))$ et converge, dans cet espace, vers un certain $v$. Comme $u_n \to u$ presque partout sur $]0,T[$ dans $L^2(\Omega)$, on a, pour presque tout $t \in [0,T]$, $u(t) = v(t)$. On a ainsi montré que $u$ est (égal presque partout à) une fonction continue $[0,T] \to L^2(\Omega)$ et un passage à la limite $n \to \infty$ dans (2.5.2) appliquée à $u_n$ nous dit que $u$ vérifie aussi (2.5.2).
$\mathcal{E}$ s'injecte donc continuement dans $\mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega))$.

Le théorème de densité, associé à la formule d'intégration par parties de la proposition 2.5.2, permet aussi de montrer des formules d'intégration par parties plus générales. Par exemple, on peut montrer que, pour tout $(u,v) \in \mathcal{E}$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle u'(t), v(t)\rangle_{E',E}\, dt &= \langle u(T), v(T)\rangle_{L^2(\Omega),L^2(\Omega)} - \langle u(0), v(0)\rangle_{L^2(\Omega),L^2(\Omega)} \\ &\quad - \int_0^T \langle v'(t), u(t)\rangle_{E',E}\, dt \end{aligned}$$

(on le montre, en utilisant (2.5.1) et la formule d'intégration par parties dans $H^1(0,T;L^2(\Omega))$ de la proposition 2.5.2, pour des fonction $(u,v) \in \mathcal{C}^\infty([0,T];E)$, puis on étend le résultat à des fonctions de $\mathcal{E}$ en utilisant le théorème de densité).

## 2.6 Dérivées distributions classiques et distributions vectorielles

### 2.6.1 Caractérisation de $W^{1,p}(0;T;L^q(\Omega))$

La proposition suivante caractérise les éléments de $W^{1,p}(0,T;L^q(\Omega))$ en termes de fonctions localement intégrables sur $]0,T[\times\Omega$ ayant, ainsi que leur dérivée dans la direction $t$ au sens des distributions sur $]0,T[\times\Omega$, certaines propriétés d'intégrabilité sur $]0,T[\times\Omega$; elle est donc le pendant de la caractérisation déjà rencontrée des éléments de $L^p(0,T;W^{1,q}(\Omega))$.
Cette caractérisation effectue aussi un lien entre les dérivées dans $\mathcal{D}'(0,T;L^q(\Omega))$ et les dérivées dans $\mathcal{D}'(]0,T[\times\Omega)$.

**Proposition 2.6.1** *Soit $T>0$ et $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Soit $(p,q)\in[1,+\infty[$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes:*

*i) $u\in W^{1,p}(0,T;L^q(\Omega))$,*

*ii) $u\in L^1_{\mathrm{loc}}(]0,T[\times\Omega)$ vérifie*

$$\int_0^T\left(\int_\Omega |u(t,x)|^q\,dx\right)^{p/q} dt<+\infty,$$

*et $\dfrac{\partial u}{\partial t}\in L^1_{\mathrm{loc}}(]0,T[\times\Omega)$ vérifie*

$$\int_0^T\left(\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right|^q dx\right)^{p/q} dt<+\infty.$$

*Dans ce cas on a, pour presque tout $t\in]0,T[$, $u'(t)(\cdot)=\frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot)$ presque partout sur $\Omega$.*

Remarques:

1) $\frac{\partial u}{\partial t}$ représente la dérivée, dans la direction $t$ et au sens des distributions sur $]0,T[\times\Omega$, de $u\in L^1_{\mathrm{loc}}(]0,T[\times\Omega)$.
2) On peut énoncer un résultat similaire lorsque $p=+\infty$.

Démonstration:
$\diamondsuit$ Sens $i)\Rightarrow ii)$: On a $u\in L^p(0,T;L^q(\Omega))\subset L^1(0,T;L^1(\omega))$ pour tout ouvert borné $\omega\subset\Omega$; d'après un résultat d'intégration à valeurs vectorielles, on en déduit que $u\in L^1(]0,T[\times\omega)$; en particulier, $u\in L^1_{\mathrm{loc}}(]0,T[\times\Omega)$. La condition d'intégrabilité sur $u$ est une re-écriture de $||u(\cdot)||_{L^q(\Omega)}\in L^p(0,T)$. En ce qui concerne la dérivée $\frac{\partial u}{\partial t}$ de $u$, comme $u'\in L^p(0,T;L^q(\Omega))\subset L^1_{\mathrm{loc}}(]0,T[\times\Omega)$, il suffit, pour conclure ce sens de la démonstration, de prouver l'égalité entre $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $u'$.
Soit $\gamma\in\mathcal{D}(\Omega)$. L'application $l:L^q(\Omega)\to\mathbb{R}$ définie par $l(f)=\int_\Omega f(x)\gamma(x)\,dx$ est linéaire continue et $u\in W^{1,p}(0,T;L^q(\Omega))$, donc $l(u)\in W^{1,p}(0,T)$ et $l(u)'=l(u')$; ainsi, pour tout $\varphi\in\mathcal{D}(]0,T[)$,

$$\begin{aligned}\int_{]0,T[\times\Omega} u(t,x)\gamma(x)\varphi'(t)\,dt\,dx &= \int_0^T \varphi'(t)l(u(t))\,dt\\ &= -\int_0^T\varphi(t)l(u'(t))\,dt\\ &= -\int_{]0,T[\times\Omega} u'(t,x)\gamma(x)\varphi(t)\,dt\,dx.\end{aligned}\tag{2.6.1}$$

Mais, pour toute fonction $\psi\in\mathcal{D}(]0,T[\times\Omega)$, il existe

$$(\gamma_{n,i})_{n\geq1,1\leq i\leq N_n}\in\mathcal{D}(\Omega)\,,\ (\varphi_{n,i})_{n\geq1,1\leq i\leq N_n}\in\mathcal{D}(]0,T[)\text{ et }K\text{ compact de }]0,T[\times\Omega,$$

tels que, pour tout $n\geq1$ et tout $i\in[1,N_n]$, $\mathrm{supp}(\varphi_{n,i}\gamma_{n,i})\subset K$ et

$$\sum_{i=1}^{N_n}\varphi_{n,i}\gamma_{n,i}\longrightarrow\psi\quad\text{uniformément sur}\quad ]0,T[\times\Omega$$
$$\sum_{i=1}^{N_n}\varphi'_{n,i}\gamma_{n,i}\longrightarrow\frac{\partial\psi}{\partial t}\quad\text{uniformément sur}\quad ]0,T[\times\Omega$$

(cf Annexe D.1); de (2.6.1), égalité linéaire, on déduit

$$\int_{]0,T[\times\Omega} u(t,x)\sum_{i=1}^{N_n}\varphi'_{n,i}(t)\gamma_{n,i}(x)\,dt\,dx = -\int_{]0,T[\times\Omega} u'(t,x)\sum_{i=1}^{N_n}\varphi_{n,i}(t)\gamma_{n,i}(x)\,dt\,dx,$$

et, en passant à la limite lorsque $n\to\infty$ (pour tout $n\geq 1$, $\sum_{i=1}^{N_n}\varphi_{n,i}\gamma_{n,i}$ et $\sum_{i=1}^{N_n}\varphi'_{n,i}\gamma_{n,i}$ ont leur support dans $K$ et $(u,u')\in L^1(K)$), on obtient

$$\int_{]0,T[\times\Omega} u(t,x)\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,x)\,dt\,dx = -\int_{]0,T[\times\Omega} u'(t,x)\psi(t,x)\,dt\,dx,$$

c'est à dire exactement $\frac{\partial u}{\partial t}=u'$ dans $\mathcal{D}'(]0,T[\times\Omega)$.
◇ Sens $ii)\Rightarrow i)$: On sait déjà que $u\in L^p(0,T;L^q(\Omega))$ et que $\frac{\partial u}{\partial t}\in L^p(0,T;L^q(\Omega))$; il suffit donc encore une fois de montrer que la dérivée $u'$ de $u$ dans $\mathcal{D}'(0,T;L^q(\Omega))$ coincide avec la dérivée $\frac{\partial u}{\partial t}$ de $u$ au sens des distributions sur $]0,T[\times\Omega$.
Soit $\varphi\in\mathcal{D}(]0,T[)$ et $\gamma\in\mathcal{D}(\Omega)$; on a, par définition de $\frac{\partial u}{\partial t}$, puisque $\gamma\varphi\in\mathcal{D}(]0,T[\times\Omega)$,

$$\begin{aligned}\int_0^T\varphi'(t)\left(\int_\Omega u(t,x)\gamma(x)\,dx\right)dt &= \int_{]0,T[\times\Omega} u(t,x)\varphi'(t)\gamma(x)\,dx\,dt\\ &= -\int_{]0,T[\times\Omega}\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\varphi(t)\gamma(x)\,dx\,dt\\ &= -\int_0^T\varphi(t)\left(\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\gamma(x)\,dx\right)dt. \qquad (2.6.2)\end{aligned}$$

En notant $l_\gamma\in(L^q(\Omega))'$ l'application $l_\gamma(f)=\int_\Omega f(x)\gamma(x)\,dx$, on sait que $l_\gamma(u)\in L^p(0,T)$ et (2.6.2) montre que la dérivée dans $\mathcal{D}'(0,T)$ de $l_\gamma(u)$ est $l_\gamma(\frac{\partial u}{\partial t})\in L^p(0,T)$; mais, par le lemme fondamental des distributions, $\{l_\gamma\,,\ \gamma\in\mathcal{D}(\Omega)\}$ est une partie de $(L^q(\Omega))'$ qui sépare $L^q(\Omega)$, donc l'égalité $(l_\gamma(u))'=l_\gamma(\frac{\partial u}{\partial t})$ dans $\mathcal{D}'(0,T)$ (valable pout tout $\gamma\in\mathcal{D}(\Omega)$) nous dit, puisque $(u,\frac{\partial u}{\partial t})\in\mathcal{D}'(0,T;L^q(\Omega))$, que $u'=\frac{\partial u}{\partial t}$ dans $\mathcal{D}'(0,T;L^q(\Omega))$, c'est à dire ce que l'on voulait. ■

**Corollaire 2.6.1** *Soit $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de Stampacchia, i.e. continue sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, de dérivée dans $L^\infty(\mathbb{R})$ et telle que $\varphi(0)=0$. Si $p\in[1,+\infty]$, $1\leq q<+\infty$ et $u\in W^{1,p}(0,T;L^q(\Omega))$, alors $\varphi(u)\in W^{1,p}(0,T;L^q(\Omega))$ et, pour presque tout $t\in]0,T[$, $(\varphi(u))'(t)(\cdot)=\varphi'(u(t,\cdot))u'(t)(\cdot)$ presque partout sur $\Omega$.*

Démonstration:
On utilise bien sûr la caractérisation ci-dessus.
L'application $(t,x)\in]0,T[\times\Omega\to\varphi(u(t,x))$ est mesurable en tant que composée d'une fonction mesurable et d'une fonction continue; de plus, comme $\varphi(0)=0$, on a $|\varphi(u(t,x))|\leq||\varphi'||_{L^\infty(\mathbb{R})}|u(t,x)|$ et la condition d'intégrabilité sur $\varphi(u)$ est vérifiée. On sait que, au sens des distributions sur $]0,T[\times\Omega$, $\frac{\partial(\varphi(u))}{\partial t}=\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial t}$, donc l'application $(t,x)\in]0,T[\times\Omega\to\frac{\partial(\varphi(u))}{\partial t}(t,x)$ est mesurable et on a $\left|\frac{\partial(\varphi(u))}{\partial t}(t,x)\right|\leq||\varphi'||_{L^\infty(\mathbb{R})}\left|\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right|$: la condition d'intégrabilité sur $\frac{\partial(\varphi(u))}{\partial t}$ est donc vérifiée et $\varphi(u)\in W^{1,p}(0,T;L^q(\Omega))$.
On a aussi montré que, pour presque tout $t\in]0,T[$, $(\varphi(u))'(t)(\cdot)=\frac{\partial\varphi(u)}{\partial t}(t,\cdot)=\varphi'(u(t,\cdot))u'(t)(\cdot)$ presque partout sur $\Omega$. ■

### 2.6.2 Généralisation

Nous proposons ici une généralisation de la partie précédente, lorsque l'espace d'arrivée n'est plus forcement un espace de Lebesgue.

On suppose que $E$ est un espace de Banach tel que $\mathcal{D}(\Omega)$ s'injecte continuement et densément dans $E$ (avec $\Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^N$). On a alors $E'\hookrightarrow\mathcal{D}'(\Omega)$.

**Lemme 2.6.1** *$L^1(0,T;E')$ s'injecte dans $\mathcal{D}'(]0,T[\times\Omega)$ au travers de l'application*

$$L^1(0,T;E') \longrightarrow \mathcal{D}'(]0,T[\times\Omega),$$
$$f \longrightarrow \widetilde{f} \text{ définie par } \langle \widetilde{f}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(]0,T[\times\Omega),\mathcal{D}(]0,T[\times\Omega)} = \int_0^T \langle f(t), \varphi(t,\cdot)\rangle_{E',E}\, dt.$$

DÉMONSTRATION:
◇ Etape 1: on prouve que cette application est bien définie.
Fixons $\varphi \in \mathcal{D}(]0,T[\times\Omega)$. On constate que $\varphi \in \mathcal{C}([0,T];E)$. En effet, en notant $K$ un compact de $\Omega$ tel que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset ]0,T[\times K$, on sait qu'il existe $C_K > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ à support dans $K$, $||\psi||_E \le C_K \nu_{k,K}(\psi)$; mais $\varphi(t,\cdot) \in \mathcal{D}(\Omega)$ est, pour tout $t \in [0,T]$, à support dans $K$, donc si $(t,t') \in [0,T]$, $||\varphi(t,\cdot) - \varphi(t',\cdot)||_E \le C_K \nu_{k,K}(\varphi(t,\cdot) - \varphi(t',\cdot))$; cela prouve bien, $\varphi$ étant régulière, que $||\varphi(t,\cdot) - \varphi(t',\cdot)||_E \to 0$ lorsque $t' \to t$, i.e. que $\varphi \in \mathcal{C}([0,T];E)$.
En particulier, $\varphi \in L^\infty(0,T;E)$; comme l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle_{E',E}$ est bilinéaire continue $E' \times E \to \mathbb{R}$ et $f \in L^1(0,T;E')$, on en déduit que $\langle f, \varphi\rangle_{E',E} \in L^1(0,T)$ et que $\int_0^T \langle f,\varphi\rangle_{E',E}$ est bien définie.
Il reste à voir que $\widetilde{f}$ est effectivement une distribution. Pour cela, on prend $M$ un compact de $Q$; il existe $K$ compact de $\Omega$ tel que $M \subset ]0,T[\times K$. Soit alors $\varphi \in \mathcal{D}(]0,T[\times\Omega)$ à support dans $M$. On a, pour tout $t \in ]0,T[$, avec les choix de $C_K > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ précédents correspondants à $K$, $|\langle f(t), \varphi(t,\cdot)\rangle_{E',E}| \le ||f(t)||_{E'} ||\varphi(t,\cdot)||_E \le C_K ||f(t)||_{E'} \nu_{k,K}(\varphi(t,\cdot)) \le C_K \nu_{k,]0,T[\times K}(\varphi) ||f(t)||_{E'}$; $\varphi$ étant à support dans $M$, on a $\nu_{k,]0,T[\times K}(\varphi) = \nu_{k,M}(\varphi)$, ce qui donne finalement

$$\left| \int_0^T \langle f(t), \varphi(t,\cdot)\rangle_{E',E}\, dt \right| \le C_K ||f||_{L^1(0,T;E')} \nu_{k,M}(\varphi)$$

et prouve que $\widetilde{f} \in \mathcal{D}'(]0,T[\times\Omega)$.

◇ Etape 2: cette application est une injection.
En effet, si $\widetilde{f} = 0$, cela signifie que $\int_0^T \langle f(t), \varphi(t,\cdot)\rangle_{E',E}\, dt = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(]0,T[\times\Omega)$. Prenons $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et notons $l_\psi$ la forme linéaire continue $a \in E' \to l_\psi(a) = \langle a, \psi\rangle_{E',E}$.
Pour $\theta \in \mathcal{D}(]0,T[)$, on a donc

$$0 = \int_0^T \langle f(t), \theta(t)\psi(\cdot)\rangle_{E',E}\, dt = \int_0^T \theta(t) l_\psi(f(t))\, dt = l_\psi\left(\int_0^T \theta(t) f(t)\, dt\right).$$

Ceci étant vrai pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, et $\mathcal{D}(\Omega)$ s'injectant densément dans $E$, on en déduit que

$$\int_0^T \theta(t) f(t)\, dt = 0 \quad \text{ dans } E'$$

(c'est en fait la définition de l'injection de $E'$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$). Cette dernière égalité étant valable pour tout $\theta \in \mathcal{D}(]0,T[)$, on en déduit que $f = 0$ dans $L^1(0,T;E')$ (lemme 2.1.2). ■

A partir de maintenant, lorsque $\mathcal{D}(\Omega)$ s'injecte continuement et densément dans un espace de Banach $E$, on considèrera toujours $L^1(0,T;E')$ ainsi injecté dans $\mathcal{D}'(]0,T[\times\Omega)$.
On peut alors citer la généralisation de la proposition 2.6.1.

**Proposition 2.6.2** *Soit $E$ un espace de Banach tel que $\mathcal{D}(\Omega)$ s'injecte continuement et densément dans $E$. Soit $u \in L^1(]0,T[\times\Omega) = L^1(0,T;L^1(\Omega))$; on note $D_t u$ la dérivée de $u$ dans $\mathcal{D}'(]0,T[\times\Omega)$ et $u_t$ la dérivée de $u$ dans $\mathcal{D}'(0,T;L^1(\Omega))$.*

*i) Si $D_t u \in L^1(0,T;E')$, on a $u_t = D_t u$ dans $\mathcal{D}'(0,T;E' + L^1(\Omega))$,*

*ii) Si $u_t \in L^1(0,T;E')$, on a $D_t u = u_t$ dans $\mathcal{D}'(]0,T[\times\Omega)$.*

Démonstration:
$\diamondsuit$ Etape 1: on suppose que $D_t u \in L^1(0,T;E')$.
Il faut prouver que, pour tout $\theta \in \mathcal{D}(]0,T[)$, on a

$$\langle u_t, \theta\rangle_{\mathcal{D}'(0,T;L^1(\Omega)),\mathcal{D}(]0,T[)} := -\int_0^T u\theta' = \int_0^T D_t u\,\theta \quad \text{dans } E' + L^1(\Omega). \tag{2.6.3}$$

Prenons $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et notons $L_\psi : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathbb{R}$ l'application $L_\psi(h) = \langle h, \psi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}$.
La restriction $l_\psi$ de $L_\psi$ à $L^1(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ est linéaire continue. Ainsi, puisque $u \in L^1(0,T;L^1(\Omega))$,

$$L_\psi\left(-\int_0^T u\theta'\right) = l_\psi\left(-\int_0^T u\theta'\right) = -\int_0^T l_\psi(u)\theta' = -\int_0^T \left(\int_\Omega u\psi\right)\theta'.$$

Par Fubini et la définition de $D_t u$, on en déduit donc que

$$L_\psi\left(-\int_0^T u\theta'\right) = -\int_{]0,T[\times\Omega} u\psi\theta' = \langle D_t u, \theta\psi\rangle_{\mathcal{D}'(]0,T[\times\Omega),\mathcal{D}(]0,T[\times\Omega)}.$$

En notant $\widetilde{l_\psi}$ la restriction de $L_\psi$ à $E'$ ($\widetilde{l_\psi}$ est une forme linéaire continue sur $E'$), on en déduit, par définition de l'injection de $L^1(0,T;E')$ dans $\mathcal{D}'(]0,T[\times\Omega)$ et puisque $D_t u \in L^1(0,T;E')$,

$$L_\psi\left(-\int_0^T u\theta'\right) = \int_0^T \theta\langle D_t u, \psi\rangle_{E',E} = \int_0^T \theta\widetilde{l_\psi}(D_t u) = \widetilde{l_\psi}\left(\int_0^T D_t u\theta\right) = L_\psi\left(\int_0^T D_t u\theta\right).$$

Ceci étant vrai pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, et $(-\int_0^T u\theta', \int_0^T D_t u\theta)$ étant deux éléments de $\mathcal{D}'(\Omega)$, on en déduit qu'ils sont égaux dans $\mathcal{D}'(\Omega)$; comme ils appartiennent en fait à $E' + L^1(\Omega)$, cette égalité a lieu dans $E' + L^1(\Omega)$, ce qui prouve (2.6.3).

$\diamondsuit$ Etape 2: on suppose que $u_t \in L^1(0,T;E')$.
Il faut donc prouver que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(]0,T[\times\Omega)$,

$$\int_0^T \langle u_t(t), \varphi(t,\cdot)\rangle_{E',E}\,dt = -\int_{]0,T[\times\Omega} u\varphi_t. \tag{2.6.4}$$

Pour cela, on utilise le théorème de densité. On sait qu'il existe $(u_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}^\infty([0,T];L^1(\Omega))$ qui converge vers $u$ dans $L^1(0,T;L^1(\Omega)) = L^1(]0,T[\times\Omega)$ et telle que $(u_n')_{n\geq 1} \in \mathcal{C}^\infty([0,T];E')$ converge vers $u_t$ dans $L^1(0,T;E')$.
Puisque $u_n'(t) \in L^1(\Omega) \cap E'$, on a, pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ (par définition des injections de $E'$ et $L^1(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$), $\langle u_n'(t), \psi\rangle_{E',E} = \int_\Omega u_n'(t)\psi = B(u_n'(t),\psi)$ où $B : L^1(\Omega) \times \mathcal{C}_b(\Omega) \to \mathbb{R}$ est l'application bilinéaire continue $B(g,h) = \int_\Omega gh$. Ainsi,

$$\int_0^T \langle u_n'(t), \varphi(t,\cdot)\rangle_{E',E}\,dt = \int_0^T B(u_n'(t), \varphi(t))\,dt.$$

Or $u_n \in \mathcal{C}^\infty([0,T];L^1(\Omega))$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,T];\mathcal{C}_b(\Omega))$, donc, par une intégration par parties classique ($B$ est bilinéaire continue), puisque $\varphi(0) = \varphi(T) = 0$,

$$\int_0^T \langle u_n'(t), \varphi(t,\cdot)\rangle_{E',E}\,dt = -\int_0^T B(u_n(t), \varphi_t(t))\,dt = -\int_0^T\int_\Omega u_n(t,x)\varphi_t(t,x)\,dx\,dt.$$

Par Fubini, on en déduit que (2.6.4) est satisfaite avec $u_n$ à la place de $u$. Grâce aux convergences de $(u_n)_{n\geq 1}$, et puisque $\varphi \in L^\infty(0,T;E)$ (voir l'étape 1 dans la preuve du lemme 2.6.1), on peut passer à la limite pour constater que $u$ vérifie aussi (2.6.4). ■

**Remerciements**: je souhaite remercier Thierry Gallouët pour m'avoir mis le pied à l'étrier (dans le sujet mathématique que ce document concerne, mais aussi dans les mathématiques avancées en général), Jacques Simon pour ses commentaires instructifs ainsi qu'Allessio Porretta et Alain Prignet pour leurs questions qui ont permis de préciser et d'enrichir ce travail.

# Références


[1] Aubin T., *Un théorème de compacité*, CRAS, 256 (1963), 5042-5044.

[2] Simon J., *Compact sets in* $L^p(0,T;B)$, Annali Mat. Pura appl. (IV), vol. CXLVI (1987), 65-96

# Annexe A

# Selection Mesurable

Nous établissons ici, lorsque $X$ est un espace mesurable, $E$ est un espace vectoriel de dimension finie et $g : X \to E'$ est mesurable, l'existence d'une fonction $f : X \to E$ mesurable telle que, pour tout $x \in X$,

$$||f(x)||_E = 1 \text{ et } \langle g(x), f(x)\rangle_{E',E} = ||g(x)||_{E'}.$$

En fait, en posant $A(x) = \{a \in E \mid ||a|| = 1\,,\ \langle g(x), a\rangle_{E',E} = ||g(x)||_{E'}\}$, cela revient a choisir, pour tout $x$, un élément $f(x)$ de $A(x)$ tel que $x \to f(x)$ soit mesurable, i.e. a opérer une "sélection mesurable" de $A$.
Nous allons déterminer $f$ par ses coordonnées $(f_1, \dots, f_n)$ dans une base quelconque de $E$. En fait, on définit par récurrence:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x) = \min\{a_1 \mid ||a|| = 1\,,\ \langle g(x), a\rangle_{E',E} = ||g(x)||_{E'}\}, \\ f_2(x) = \min\{a_2 \mid ||a|| = 1\,,\ a_1 = f_1(x)\,,\ \langle g(x), a\rangle_{E',E} = ||g(x)||_{E'}\}, \\ f_k(x) = \min\{a_k \mid ||a|| = 1\,,\ \forall i < k\ \ a_i = f_i(x)\,,\ \langle g(x), a\rangle_{E',E} = ||g(x)||_{E'}\} \end{array} \right.$$

(ce sont bien des minima car on minimise, dans chaque cas, une fonction continue de $a$ — sa $k^{\text{eme}}$ composante — sur un compact). On constate que, pour tout $x \in X$, par définition de $f_n(x)$, on a $f_n(x) = a_n$ pour un $a \in E$ de norme 1 tel que $a_1 = f_1(x), \dots, a_{n-1} = f_{n-1}(x)$ et $\langle g(x), a\rangle_{E',E} = ||g(x)||_{E'}$; ainsi, $f(x) = a$ est de norme 1 et vérifie $\langle g(x), f(x)\rangle_{E',E} = ||g(x)||_{E'}$.
Il ne reste donc plus qu'à vérifier la mesurabilité de $f$.

**Lemme A.0.1** *Si $H : X \times E \to \mathbb{R}^l$ et $G : X \times E \to \mathbb{R}$ sont mesurables par rapport à $x \in X$ et continues par rapport à $a \in E$, alors $S = \{x \in X \mid \exists a \in E\,,\ ||a|| = 1\,,\ |H(x,a)| = 0\,,\ G(x,a) \le 0\}$ est mesurable.*

Démonstration:
On prend $(a_i)_{i \ge 1}$ une suite dénombrable dense dans la sphère unité de $E$ et on constate simplement que

$$S = \bigcap_{j \ge 1} \bigcup_{i \ge 1} \{x \in X \mid |H(x, a_i)| < 1/j\,,\ G(x, a_i) < 1/j\}.$$

En effet, si $x \in S$, alors il existe $a$ de norme 1 tel que $|H(x,a)| = 0$ et $G(x,a) \le 0$; par continuité des applications $|H(x,\cdot)|$ et $G(x,\cdot)$, et comme $(a_i)_{i \ge 1}$ est dense dans la sphère unité, pour tout $j \ge 1$, il existe $i \ge 1$ tel que $a_i$ soit assez proche de $a$ pour que l'on ait $|H(x, a_i)| < 1/j$ et $G(x, a_i) < 1/j$.
Réciproquement, si $x \in X$ est tel que, pour tout $j \ge 1$, il existe $i_j \ge 1$ tel que $|H(x, a_{i_j})| < 1/j$ et $G(x, a_{i_j}) < 1/j$, comme la sphère unité de $E$ est compacte, on peut extraire de $(a_{i_j})_{j \ge 1}$ une suite qui converge vers $a$ de norme 1 et, grâce à la continuité des applications par rapport à leur deuxième argument on obtient, à la limite, $|H(x,a)| = 0$ et $G(x,a) \le 0$. ∎
Déduisons de ce lemme la mesurabilité de chaque composante de $f$; on commence par remarquer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$f_1^{-1}([-\infty, \alpha]) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in E\,,\ ||a|| = 1\,,\ \langle g(x), a\rangle_{E',E} - ||g(x)||_{E'} = 0\,,\ a_1 \le \alpha\}$$

et que $f_1$ est donc mesurable (c'est le lemme avec $H(x,a) = \langle g(x), a\rangle_{E',E} - ||g(x)||_{E'}$ et $G(x,a) = a_1 - \alpha$), puis on finit par récurrence: si $f_1, \dots, f_k$ sont mesurables, alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} \{x \in X \mid f_{k+1}(x) \le \alpha\} & = & \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in E\,,\ ||a|| = 1\,,\ a_1 = f_1(x), \dots, a_k = f_k(x), \\ & & \langle g(x), a\rangle_{E',E} - ||g(x)||_{E'} = 0\,,\ a_{k+1} \le \alpha\}\,, \end{array}$$

et $f_{k+1}$ est donc mesurable (c'est le lemme avec $H(x,a) = (\langle g(x), a\rangle_{E',E} - ||g(x)||_{E'}, a_1 - f_1(x), \ldots, a_k - f_k(x))$ et $G(x,a) = a_{k+1} - \alpha$).

# Annexe B

# Un peu d'Analyse Fonctionnelle abstraite

Tous les résultats sont énoncés ici dans le cas où $E$ est un $\mathbb{R}$-espace de Banach, mais restent valables dans le cas où le corps de base est $\mathbb{C}$ (en changeant, aux endroits convenables, $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$).

## B.1 Sur la réflexivité

**Lemme B.1.1** *Soit $E$ un espace de Banach. Si $G$ est un sous-espace fermé de $E$ et $x \notin G$, alors le sous-espace $G \oplus \mathbb{R}x$ est fermé dans $E$.*

Démonstration:
On prend $g_n \in G$ et $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $g_n + \lambda_n x \to a$ dans $E$ et on montre que $a \in G \oplus \mathbb{R}x$.
Si $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ est non-bornée, il existe une sous-suite $(\lambda_{n_k})_{k\geq 1}$ telle que $|\lambda_{n_k}| \to \infty$: alors $\frac{1}{\lambda_{n_k}} g_{n_k} + x \to 0$, donc $-\frac{1}{\lambda_{n_k}} g_{n_k} \to x$; mais $\frac{1}{\lambda_{n_k}} g_{n_k} \in G$, et $G$ est fermé, donc $x \in G$, ce qui est exclus.
$(\lambda_n)_{n\geq 1}$ est donc bornée dans $\mathbb{R}$ et il existe une sous-suite $(\lambda_{n_k})_{k\geq 1}$ qui converge vers $\lambda \in \mathbb{R}$; on a alors $g_{n_k} \to a - \lambda x \in G$ ($G$ est fermé), donc $a = a - \lambda x + \lambda x \in G \oplus \mathbb{R}x$.
Remarquons que l'on peut étendre ce résultat à: si $G$ est un sous-espace fermé et $F$ est de dimension finie, alors $G + F$ est fermé dans $E$ (par récurrence sur $\dim(F)$). ■

**Corollaire B.1.1** *Si $E$ est un espace de Banach et $E'$ est séparable, alors $E$ est séparable.*

Démonstration:
Soit $D$ une partie dénombrable dense dans $E'$ et prenons, pour chaque $f \in D$, $x_f \in E$ de norme 1 tel que

$$|f(x_f)| \geq \frac{1}{2}||f||_{E'}$$

($x_f$ existe par définition de la norme sur $E'$). Soit $G = \overline{\mathrm{Vect}(\{x_f\ ,\ f \in D\})}$ sous-espace fermé séparable de $E$: nous allons montrer que $G = E$.
Tout d'abord, on remarque que si $f \in E'$ vérifie $G \subset \ker f$, alors $f = 0$; en effet, par définition de $D$, il existe une suite $f_n \in D$ qui converge vers $f$ dans $E'$; mais alors, puisque $f_{|G} = 0$, pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{2}||f_n||_{E'} \leq |f_n(x_{f_n})| = |(f_n - f)(x_{f_n})| \leq ||f_n - f||_{E'}$ (car $x_{f_n}$ est de norme 1), donc $||f_n||_{E'} \to 0$ et $f = 0$.
Supposons maintenant que $G \neq E$ et prenons $x \in E \backslash G$: par le lemme précédent, comme $G$ est fermé, $G \oplus \mathbb{R}x$ est un sous-espace fermé de $E$, donc un espace de Banach; mais $G$ et $\mathbb{R}x$ sont fermés en somme algébrique directe dans $G \oplus \mathbb{R}x$, donc cette somme est topologique; soit maintenant la forme linéaire $f : G \oplus \mathbb{R}x \to \mathbb{R}$ définie par: $\forall y \in G\ ,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(y + \lambda x) = \lambda$. Comme la somme est topologique, cette forme linéaire est continue sur $G \oplus \mathbb{R}x$ et, par Hahn-Banach, peut se prolonger en une forme linéaire continue sur $E$, qui vérifie donc: $f \neq 0$ (car $f(x) \neq 0$), $G \subset \ker f$, c'est à dire deux propriétés contradictoires par ce qui précède. ■

## B.2 Application duale

**Définition B.2.1** *Soient $E$ et $F$ des espaces de Banach. Si $T : E \to F$ est linéaire continue, on définit $T^* : F' \to E'$ par: $\forall l \in F'$, $T^*(l) = l \circ T$.*

Remarques:

1) Il faut vérifier que $l \circ T \in E'$, mais c'est évident car $l$ et $T$ sont linéaires continues.

2) $T^*$ est caractérisé par: $\forall l \in F'$ , $\forall a \in E$, $\langle T^*(l), a\rangle_{E',E} = \langle l, T(a)\rangle_{F',F}$.

**Proposition B.2.1** *i) $T^* : F' \to E'$ est linéaire continue et $||T^*||_{\mathcal{L}(F',E')} = ||T||_{\mathcal{L}(E,F)}$.*
*ii) Si $T : E \to F$ est un isomorphisme alors $T^* : F' \to E'$ est un isomorphisme et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*
*iii) Si $T : E \to F$ est un isomorphisme isométrique alors $T^* : F' \to E'$ est un isomorphisme isométrique.*

Démonstration:
Pour i), on remarque que $||T^*(l)||_{E'} = ||l\circ T||_{E'} \le ||l||_{F'}||T||_{\mathcal{L}(E,F)}$, donc que $T^*$ est continue (la linéarité est évidente) et $||T^*||_{\mathcal{L}(F',E')} \le ||T||_{\mathcal{L}(E,F)}$. Pour montrer l'inégalité en sens inverse, on prend, pour $\varepsilon > 0$, $e \in E$ de norme 1 tel que $||T(e)||_F \ge ||T||_{\mathcal{L}(E,F)} - \varepsilon$; on sait alors qu'il existe $l \in F'$ de norme 1 tel que $\langle l, T(e)\rangle_{F',F} = ||T(e)||_F$, et on obtient donc $||T^*||_{\mathcal{L}(F',E')} \ge \langle l, T(e)\rangle_{F',F} \ge ||T||_{\mathcal{L}(E,F)} - \varepsilon$, c'est à dire, puisque cette inégalité est vraie pour tout $\varepsilon > 0$, $||T^*||_{\mathcal{L}(F',E')} \ge ||T||_{\mathcal{L}(E,F)}$.
Pour montrer ii), il suffit de constater que $(T^{-1})^*(T^*(l)) = (T^{-1})^*(l \circ T) = l \circ T \circ T^{-1} = l$ pour tout $l \in F'$ et $T^*((T^{-1})^*(u)) = T^*(u \circ T^{-1}) = u \circ T^{-1} \circ T = u$ pour tout $u \in E'$.
Pour montrer iii), on écrit juste, pour tout $l \in F'$,

$$||T^*(l)||_{E'} = \sup_{||a||_E=1} |\langle T^*(l), a\rangle_{E',E}| = \sup_{||a||_E=1} |\langle l, T(a)\rangle_{F',F}|,$$

donc, en posant $b = T(a)$ et en utilisant le fait que $T$ est un isomorphisme isométrique $E \to F$, $||T^*(l)||_{E'} = \sup_{||b||_F=1} |\langle l, b\rangle_{F',F}| = ||l||_{F'}$. ■

## B.3 Injections d'Espaces de Banach

Dans cette annexe, on montre que, lorsque l'on prend deux espaces de Banach $E$ et $F$ naturellement injectés dans un espace vectoriel topologique $\mathcal{V}$, on peut construire un espace de Banach $G$ inclus dans $\mathcal{V}$ et dans lequel $E$ et $F$ s'injectent continuement.
Cela permet, entre autres, de considérer les fonctions $u \in L^p(0, T; E)$ telles que $u' \in L^p(0, T, F)$ comme des éléments de $W^{1,p}(0, T; G)$.

Soit donc $(E, ||\cdot||_E)$ et $(F, ||\cdot||_F)$ deux espaces de Banach tels qu'il existe un espace vectoriel topologique $\mathcal{V}$ dans lequel $E$ et $F$ s'injectent continuement. On munit l'espace $G = E + F \subset \mathcal{V}$ de la norme

$$||x||_G = \inf\{||x_E||_E + ||x_F||_F \mid x = x_E + x_F\ ,\ x_E \in E\ ,\ x_F \in F\}.$$

Commençons par constater que ceci définit bien une norme:
• Si $||x||_G = 0$ alors, pour tout $n \ge 1$, il existe $y_n \in E$ et $z_n \in F$ tels que $||y_n||_E + ||z_n||_F \le 1/n$ et $x = y_n + z_n$; cela implique donc $y_n \to 0$ dans $E$ et $z_n \to 0$ dans $F$ donc, puisque $E$ et $F$ s'injectent continuement dans $\mathcal{V}$, $y_n \to 0$ et $z_n \to 0$ dans $\mathcal{V}$; comme $x = y_n + z_n$, cela donne $x = 0$ dans $\mathcal{V}$, donc dans $G$.
• Soit $x \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$; pour tous $(x_E, x_F) \in E \times F$ tels que $x = x_E + x_F$, on a $\lambda x = \lambda x_E + \lambda x_F$, donc $||\lambda x||_G \le ||\lambda x_E||_E + ||\lambda x_F||_F = |\lambda|(||x_E||_E + ||x_F||_F)$, soit, en prenant la borne inférieure sur tous ces $(x_E, x_F)$, $||\lambda x||_G \le |\lambda|\, ||x||_G$; pour l'inégalité inverse, on écrit $||x||_G = ||\frac{1}{\lambda} \times \lambda x||_G \le \frac{1}{|\lambda|}||\lambda x||_G$, et on obtient $|\lambda|\, ||x||_G \le ||\lambda x||_G$.
• Soit $(y, z) \in G^2$ et $x = y + z$; si $(y_E, y_F) \in E \times F$ sont tels que $y = y_E + y_F$ et $(z_E, z_F) \in E \times F$ sont tels que $z = z_E + z_F$, on a $x = (y_E + z_E) + (y_F + z_F)$, avec $y_E + z_E \in E$ et $y_F + z_F \in F$, donc $||x||_G \le ||y_E + z_E||_E + ||y_F + z_F||_F \le (||y_E||_E + ||y_F||_F) + (||z_E||_E + ||z_F||_F)$; en prenant maintenant la borne inférieure sur de tels $(y_E, y_F)$ et $(z_E, z_F)$, on a $||x||_G \le ||y||_G + ||z||_G$.

$G$, muni de cette norme, est bien un espace de Banach: en effet, si $\sum x_n$ est une série d'éléments de $G$ qui est absolument convergente, alors, pour tout $n \geq 1$, il existe $(x_n^E, x_n^F) \in E \times F$ tels que $x_n = x_n^E + x_n^F$ et $||x_n^E||_E + ||x_n^F||_F \leq ||x_n||_G + 1/n^2$; comme $\sum_{n\geq 1} ||x_n||_G < +\infty$, on en déduit que $\sum_{n\geq 1} ||x_n^E||_E < +\infty$ et $\sum_{n\geq 1} ||x_n^F||_F < +\infty$ et, puisque $E$ et $F$ sont des espaces de Banach, que $\sum_{n\geq 1} x_n^E$ converge vers $x_E$ dans $E$ et $\sum_{n\geq 1} x_n^F$ converge vers $x_F$ dans $F$. On constate alors que

$$\sum_{n=1}^N x_n - (x_E + x_F) = \left(\sum_{n=1}^N x_n^E - x_E\right) + \left(\sum_{n=1}^N x_n^F - x_F\right),$$

avec $\sum_{n=1}^N x_n^E - x_E \in E$ et $\sum_{n=1}^N x_n^F - x_F \in F$, d'où

$$\left|\left|\sum_{n=1}^N x_n - (x_E + x_F)\right|\right|_G \leq \left|\left|\sum_{n=1}^N x_n^E - x_E\right|\right|_E + \left|\left|\sum_{n=1}^N x_n^F - x_F\right|\right|_F \stackrel{N\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

i.e. la série $\sum x_n$ converge vers $x = x_E + x_F$ dans $G$.

Voyons maintenant pourquoi $E$ s'injecte continuement dans $G$ (il en est de même pour $F$); si $x \in E$, la décomposition $x = x + 0$, avec $(x, 0) \in E \times F$, nous permet de voir que $||x||_G \leq ||x||_E + ||0||_F = ||x||_E$, c'est à dire que, sur $E$, $||\cdot||_G \leq ||\cdot||_E$: l'injection de $E$ dans $G$ est continue et de norme inférieure à 1.

La proposition essentielle, qui justifie l'introduction de l'espace $E + F$ et le fait que l'on puisse effectuer des calculs dans cet espace, est la suivante.

**Proposition B.3.1** *Si $f \in L^1(X; E) \cap L^1(X; F)$ alors les intégrales de $f$ dans $E$ et dans $F$ coincident.*

Remarque:

> En particulier, si $E$ s'injecte continuement dans $F$ et $f \in L^1(X; E)$, alors $f \in L^1(X; F)$ et les intégrales de $f$ dans $E$ et $F$ coincident.

DÉMONSTRATION:
On note $I$ l'injection naturelle de $E$ dans $E + F$ et $J$ l'injection naturelle de $F$ dans $E + F$. $f_E$ désigne $f$ lorsqu'on la considère à valeurs dans $E$ et $f_F$ désigne $f$ lorsqu'on la considère à valeurs dans $F$.
Comme $I$ et $J$ sont linéaires continues et $f_E \in L^1(X; E)$, $f_F \in L^1(X; F)$, on a $I(f_E) \in L^1(X; E + F)$ et $I(f_F) \in L^1(X; E + F)$ avec

$$\int_X I(f_E)\, d\mu = I\left(\int_X f_E\, d\mu\right)$$
$$\int_X J(f_F)\, d\mu = J\left(\int_X f_F\, d\mu\right).$$

Or, par définition de $I$, $J$, $f_E$ et $f_F$, $I(f_E) = J(f_F) = f_{E+F}$ dans $E + F$ ($f_{E+F}$ désigne $f$ considérée à valeurs dans $E + F$), donc $\int_X f_{E+F}\, d\mu = I(\int_X f_E\, d\mu) = J(\int_X f_F\, d\mu)$, ce qui revient exactement à dire que les intégrales de $f$ dans $E$, $F$ et $E + F$ coincident (lorsque l'on omet les fonctions $I$ et $J$, c'est-à-dire que l'on injecte naturellement $E$ et $F$ dans $E + F$).■

# Annexe C

# Identifications Simultanées

Soit un espace de Banach $E$ qui s'injecte continuement dans un deuxième espace de Banach $G$. On a alors naturellement $\mathcal{D}'(I;E) \subset \mathcal{D}'(I;G)$; plus précisément, si on pose, pour $T \in \mathcal{D}'(I;E)$,

$$\widetilde{T} \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{D}(I) & \longrightarrow & G \\ \varphi & \longrightarrow & \langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'_E, \mathcal{D}} \in E \subset G, \end{array} \right.$$

alors $T \in \mathcal{D}'(I;E) \to \widetilde{T} \in \mathcal{D}'(I;G)$ est bien définie et c'est une injection. En effet:

- $\widetilde{T} \in \mathcal{D}'(I;G)$ car, pour tout $K$ compact de $I$, il existe $C_K > 0$ et $k \geq 0$ tel que, si $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ a son support dans $K$, on ait $||\langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'_E, \mathcal{D}}||_E \leq C_K \nu_{k,K}(\varphi)$, ce qui nous donne, avec $C > 0$ tel que $|| \cdot ||_G \leq C || \cdot ||_E$, $||\widetilde{T}(\varphi)||_G \leq (CC_K)\nu_{k,K}(\varphi)$.
- $T \to \widetilde{T}$ est linéaire (évident) injective car, lorsque $\widetilde{T} = 0$, on a, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, $\langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'_E, \mathcal{D}} = 0$ (dans $G$, donc dans $E$), c'est à dire $T = 0$.

De plus la dérivée de $T \in \mathcal{D}'(I;E)$ peut être, au travers de cette injection, identifiée à la dérivée de $T$ en tant que distribution à valeurs dans $G$, i.e. $\widetilde{T'} = \widetilde{T}'$ dans $\mathcal{D}'(I;G)$; en effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(I)$,

$$\begin{array}{rcl} \langle \widetilde{T'}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'_G, \mathcal{D}} & = & \langle T', \varphi \rangle_{\mathcal{D}'_E, \mathcal{D}} \\ & = & -\langle T, \varphi' \rangle_{\mathcal{D}'_E, \mathcal{D}} \\ & = & -\langle \widetilde{T}, \varphi' \rangle_{\mathcal{D}'_G, \mathcal{D}} \\ & = & \langle \widetilde{T}', \varphi \rangle_{\mathcal{D}'_G, \mathcal{D}}. \end{array}$$

Si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I;E)$ alors $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I;G)$ et, lorsque l'on veut considérer $f$ comme une distribution à valeurs dans un espace de Banach, on peut le faire soit au travers de $T^E$, soit au travers de $T^G$; de plus, si on regarde $f$ comme la distribution $T^E_f \in \mathcal{D}'(I;E)$, on peut (grâce à l'injection ci-dessus) considérer $T^E_f$ comme un élément de $\mathcal{D}'(I;G)$. Cela nous donne donc deux moyens de voir $f$ comme un élément de $\mathcal{D}'(I;G)$: en tant que $T^E_f$ vu dans $\mathcal{D}'(I;G)$ ou bien en tant que $T^G_f$.
On ne pourra donc identifier $f$ à ses distributions associées $T^E_f$ et $T^G_f$ tout en faisant l'injection naturelle $\mathcal{D}'(I;E) \subset \mathcal{D}'(I;G)$ que si les deux éléments de $\mathcal{D}'(I;G)$ construits ci-dessus à partir de $f$ coincident. C'est en effet le cas: pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, on a

$$\langle T^E_f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'_G, \mathcal{D}} = \langle T^E_f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'_E, \mathcal{D}} = \int_I f\varphi \, d\mu \qquad \text{(intégrale à valeurs dans } E\text{)}$$

$$\langle T^G_f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'_G, \mathcal{D}} = \int_I f\varphi \, d\mu \qquad \text{(intégrale à valeurs dans } G\text{).}$$

Mais $f\varphi \in L^1(I;E) \cap L^1(I;G)$, donc les intégrales de $f\varphi$ dans $E$ et dans $G$ coincident; on en déduit $\langle T^E_f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'_G, \mathcal{D}} = \langle T^G_f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'_G, \mathcal{D}}$, c'est à dire $T^E_f = T^G_f$ dans $\mathcal{D}'(I;G)$.

Ainsi, lorsque l'on a deux espaces de Banach $E \hookrightarrow G$, on peut effectuer simultanément, lorsque $f \in L^1_{\text{loc}}(I;E) \subset L^1_{\text{loc}}(I;G)$, les identifications

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}'(I;E) & \subset & \mathcal{D}'(I;G)\,, \\ f & = & T_f^E\,, \\ f & = & T_f^G\,. \end{array}$$

# Annexe D

# Résultats de densité dans $\mathcal{D}(\Omega)$

## D.1 Densité des fonctions tensorielles

**Théorème D.1.1** *Soit $V$ un ouvert de $\mathbb{R}^q$ et $\psi \in \mathcal{D}(V)$; il existe un compact $K$ de $V$ et des fonctions $(\varphi_r^{(n,j)})_{n\geq 1\,,\, j\in[1,n]\,,\, r\in[1,q]} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telles que, en posant $\Theta_n(x) = \sum_{j=1}^n \varphi_1^{(n,j)}(x_1)\cdots\varphi_q^{(n,j)}(x_q)$,*

$$\begin{aligned}&\Theta_n \text{ a son support dans } K,\\ &\partial^\alpha\Theta_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \partial^\alpha\psi \text{ uniformément sur } V, \text{ pour tout } \alpha\in\mathbb{N}^q.\end{aligned}$$

Démonstration:

◇ Etape 1: Réduction au cas où $V$ est un pavé et élimination de la condition sur le support.

Soit $D_l$ l'ensemble des pavées ouverts de la forme

$$\prod_{r=1}^q ]k_r/2^l, (k_r+2)/2^l[,$$

avec $k_r \in \mathbb{Z}$, dont l'adhérence est incluse dans $V$; on constate que $V = \cup_{l\geq 1}\cup_{P\in D_l} P$ (car, pour tout $x$ dans $V$, il existe $l\geq 1$ tel que $\overline{B}_\infty(x, 1/2^{l-1}) \subset V$: les pavés d'ordre $l$ qui contiennent $x$ ont donc leur adhérence dans $V$ et appartiennent à $D_l$).

Comme $\mathrm{supp}(\psi)$ est un compact de $\Omega$, il existe un nombre fini de tels pavés $(P_1,\ldots,P_s) \in \cup_{l\geq 1} D_l$ qui recouvrent $\mathrm{supp}(\psi)$; posons $K = \overline{P_1}\cup\ldots\cup\overline{P_s}$: c'est un compact de $V$. Prenons $(\gamma_1,\ldots,\gamma_s)$ une partition $\mathcal{C}^\infty$ de l'unité sur $\mathrm{supp}(\psi)$ subordonnée au recouvrement $(P_1,\ldots,P_s)$.

Supposons que l'on ait démontré le résultat suivant

$$\begin{aligned}&\text{Pour tout pavé borné } P \text{ de } \mathbb{R}^q, \text{ pour tout } \phi\in\mathcal{D}(P),\\ &\text{il existe } (\varphi_r^{(n,j)})_{n\geq 1\,,\, j\in[1,n]\,,\, r\in[1,q]} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ tels que}\\ &x\to\Theta_n(x) = \textstyle\sum_{j=1}^n \varphi_1^{(n,j)}(x_1)\cdots\varphi_q^{(n,j)}(x_q) \text{ appartienne à } \mathcal{D}(P) \text{ et vérifie}\\ &\partial^\alpha\Theta_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \partial^\alpha\phi \text{ uniformément sur } P, \text{ pour tout } \alpha\in\mathbb{N}^q.\end{aligned} \tag{D.1.1}$$

Modulo ce résultat, et puisque $\gamma_m\psi \in \mathcal{D}(P_m)$ lorsque $m\in[1,s]$, on obtient pour chaque $m\in[1,s]$ une suite de fonctions $\Theta_n^{(m)}(x) = \sum_{j=1}^n \varphi_1^{(n,j,m)}(x_1)\cdots\varphi_q^{(n,j,m)}(x_q) \in \mathcal{D}(P_m)$ qui converge uniformément vers $\gamma_m\psi$ sur $P_m$ et dont les suites de dérivées convergent uniformément vers les dérivées de $\gamma_m\psi$ sur $P_m$; comme $\Theta_n^{(m)} = \gamma_m\psi = 0$ hors de $P_m$, la convergence est en fait uniforme sur tout $V$. Ainsi,

$$\Theta_n(x) = \sum_{m=1}^s \Theta_n^{(m)}(x) = \sum_{m=1}^s\sum_{j=1}^n \varphi_1^{(n,j,m)}(x_1)\cdots\varphi_q^{(n,j,m)}(x_q)$$

est une suite de fonctions de la forme voulue, qui sont dans $\mathcal{D}(P_1\cup\cdots\cup P_s)\subset\mathcal{D}(V)$, avec leurs supports dans $P_1\cup\cdots\cup P_s\subset K$ compact fixé de $V$, qui convergent uniformément sur $V$ vers $\sum_{m=1}^s \gamma_m\psi = \psi$ et dont les dérivées convergent uniformément sur $V$ vers les dérivées de $\psi$.

◇ Etape 2: Preuve de (D.1.1).

Soit $P$ un pavé borné de $\mathbb{R}^q$ et $\phi\in\mathcal{D}(P)$; on prend $T>0$ tel que $P\subset]-T/4, T/4[^q$.

Soit $\rho_n(t) = c_n(2+\cos(2\pi t/T))^n$ où $c_n > 0$ est choisi tel que $\int_{-T/2}^{T/2} \rho_n(t)\,dt = 1$; la fonction $\rho_n$ est positive, d'intégrale sur $]-T/2, T/2[$ égale à 1 et vérifie:

$$\forall \delta > 0\,, \int_{\delta<|t|<T/2} \rho_n(t)\,dt \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En effet, par définition de $c_n$ on a (puisque, si $0 < t < T/2$, $0 \le \sin(2\pi t/T) \le 1$)

$$\begin{aligned} 1 = c_n \int_{|t|<T/2} (2+\cos(2\pi t/T))^n\,dt &\geq 2c_n \int_{0<t<T/2} (2+\cos(2\pi t/T))^n \sin(2\pi t/T)\,dt \\ &\geq -\frac{Tc_n}{2\pi(n+1)} \int_0^{T/2} \frac{d}{dt}\left((2+\cos(2\pi t/T))^{n+1}\right)\,dt \\ &\geq 3^{n+1}\frac{Tc_n}{2\pi(n+1)}, \end{aligned}$$

donc $0 \le c_n \le Mn/3^n$, d'où (puisque, si $\delta < |t| < T/2$, $2+\cos(2\pi t/T) \le 2+\cos(2\pi\delta/T) = r < 3$)

$$0 \le \int_{\delta<|t|<T/2} \rho_n(t)\,dt \le TMnr^n/3^n,$$

cette dernière quantité tendant bien vers 0 lorsque $n\to\infty$ puisque $r < 3$.
En d'autres termes, la famille $(\rho_n)_{n\ge1}$ est une approximation de l'unité dans $]-T/2, T/2[$ (par des polynômes trigonométriques de période $T$) et on en déduit que

$$R_n(x) = \prod_{l=1}^{q} \rho_n(x_l)$$

est une approximation de l'unité dans $]-T/2, T/2[^q$; la seule "difficulté" étant de montrer que, pour tout $\delta > 0$, en notant $N$ la norme infinie dans $\mathbb{R}^q$, on a

$$\int_{\delta<N(x)<T/2} R_n(x)\,dx \longrightarrow 0 \qquad \text{lorsque } n\to\infty.$$

Pour le prouver, il suffit de constater que

$$\{x \in ]-T/2, T/2[^q \mid N(x) > \delta\} \subset \bigcup_{l=1}^{q} \{x \in ]-T/2, T/2[^q \mid |x_l| > \delta\}$$

et d'utiliser les propriétés d'approximation de l'unité de $\rho_n$.

Notons

$$\theta_n(x) = \int_{]-T/2,T/2[^q} R_n(s)\phi(x-s)\,ds.$$

$\theta_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^q)$ et on a, par dérivation sous l'intégrale, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^q$,

$$\partial^\alpha\theta_n(x) = \int_{]-T/2,T/2[^q} R_n(s)\partial^\alpha\phi(x-s)\,ds.$$

On constate alors que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^q$, $\partial^\alpha\theta_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \partial^\alpha\phi$ uniformément sur $]-T/2, T/2[^q$: en effet, pour tout $\varepsilon > 0$, en prenant le $\delta$ correspondant à l'uniforme continuité de $\partial^\alpha\phi$ sur $\mathbb{R}^q$, on a pour tout $x \in ]-T/2, T/2[^q$

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha\theta_n(x) - \partial^\alpha\phi(x)| &\leq \left| \int_{]-T/2,T/2[^q} R_n(s)(\partial^\alpha\phi(x-s) - \partial^\alpha\phi(x))\,ds \right| \\ &\leq 2||\partial^\alpha\phi||_\infty \int_{s\in]-T/2,T/2[^q, N(s)>\delta} R_n(s)\,ds + \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui montre le résultat puisque la dernière quantité ne dépend pas de $x$ et tend vers $\varepsilon$ lorsque $n \to \infty$.
Soit maintenant $\mathrm{supp}(\phi)_r$ la projection sur la $r^{\mathrm{eme}}$ coordonnée du support de $\phi$; pour tout $r \in [1, q]$, $\mathrm{supp}(\phi)_r$ est un compact inclus dans la projection $P_r$ de $P$ sur la $r^{\mathrm{eme}}$ coordonnée, donc il existe $\gamma_r \in \mathcal{D}(P_r)$, $\gamma_r \equiv 1$ au voisinage $\mathrm{supp}(\phi)_r$, $\gamma_r(P_r) \subset [0,1]$. $\Theta_n(x) = \theta_n(x) \prod_{r=1}^q \gamma_r(x_r)$ est $\mathcal{C}^\infty$ et à support dans $K = \mathrm{supp}(\gamma_1) \times \cdots \times \mathrm{supp}(\gamma_q)$, avec $K$ inclus dans $P \subset ]-T/4, T/4[^q$ ($P$ est un pavé, i.e. $P = \prod_{r=1}^q P_r$), donc $\Theta_n \in \mathcal{D}(P)$.
Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^q$, on a

$$\partial^\alpha \Theta_n = \partial^\alpha \theta_n \prod_r \gamma_r + \sum_{0 \le \beta \le \alpha\,,\ \beta \ne 0} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} \theta_n \partial^\beta \prod_r \gamma_r.$$

Or $\partial^\alpha \theta_n \prod_r \gamma_r \to \partial^\alpha \phi$ uniformément sur $P$; en effet, $\partial^\alpha \theta_n \prod_r \gamma_r = \partial^\alpha \theta_n$ sur $\mathrm{supp}(\phi) \subset \prod_r \mathrm{supp}(\phi)_r$ et $|\partial^\alpha \theta_n \prod_r \gamma_r| \le |\partial^\alpha \theta_n|$ qui converge uniformément vers 0 sur $P \backslash \mathrm{supp}(\phi)$ puisque $\partial^\alpha \phi_{|P \backslash \mathrm{supp}(\phi)} = 0$. De plus, lorsque $0 \le \beta \le \alpha$, $\partial^\beta \prod_r \gamma_r = \prod_r \gamma_r^{(\beta_r)}$; donc, quand $\beta \ne 0$ (i.e. quand il existe $j$ tel que $\beta_j > 0$), on a $\partial^\beta \prod_r \gamma_r = 0$ sur $\mathrm{supp}(\phi)$ (car $\gamma_j^{(\beta_j)} = 0$ sur $\mathrm{supp}(\phi)_j$) donc

$$\begin{aligned} \left|\left| \partial^{\alpha-\beta} \theta_n \partial^\beta \prod_r \gamma_r \right|\right|_{L^\infty(P)} &= \left|\left| \partial^{\alpha-\beta} \theta_n \partial^\beta \prod_r \gamma_r \right|\right|_{L^\infty(P \backslash \mathrm{supp}(\phi))} \\ &\le \left|\left| \partial^\beta \prod_r \gamma_r \right|\right|_{L^\infty(P)} ||\partial^{\alpha-\beta} \theta_n||_{L^\infty(P \backslash \mathrm{supp}(\phi))} \end{aligned}$$

et $||\partial^{\alpha-\beta} \theta_n||_{L^\infty(P \backslash \mathrm{supp}(\phi))} \to 0$ lorsque $n \to \infty$, puisque $\partial^{\alpha-\beta} \theta_n \to \partial^{\alpha-\beta} \phi$ uniformément sur $P$ et $\partial^{\alpha-\beta} \phi = 0$ hors de $\mathrm{supp}(\phi)$.
En rassemblant ces convergences, on a donc $\partial^\alpha \Theta_n \to \partial^\alpha \phi$ uniformément sur $P$.

Pour conclure, il suffit donc de constater que $\Theta_n$ a la forme voulue; pour cela, on voit que $\theta_n$ est égale, sur $]-T/4, T/4[^q$, à une somme finie de fonctions de la forme $\varphi_1(x_1) \ldots \varphi_q(x_q)$ avec $\varphi_r \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ (car $\Theta_n$ sera alors égale, sur $\mathbb{R}^q$, à une somme finie de fonctions de la forme $(\gamma_1 \varphi_1)(x_1) \ldots (\gamma_q \varphi_q)(x_q)$, avec $\gamma_r \varphi_r \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$). Mais $\rho_n(t)$ est un polynôme trigonométrique de période $T$, donc une combinaison linéaire de fonctions de la forme $e^{\frac{2ik\pi t}{T}}$, et $R_n(x)$ est donc une combinaison linéaire de fonctions de la forme $\exp(2i\pi(k_1 x_1 + \ldots + k_q x_q)/T) = \prod_{r=1}^q \exp(2ik_r \pi x_r/T)$; de plus, pour tout $x \in ]-T/4, T/4[$,

$$\theta_n(x) = \int_{]-T/2, T/2[^q} R_n(s) \phi(x-s)\, ds = \int_{x + ]-T/2, T/2[^q} R_n(x-s) \phi(s)\, ds.$$

Mais, puisque $x \in ]-T/4, T/4[^q$, $x + ]-T/2, T/2[^q \supset ]-T/4, T/4[^q$ et, puisque $\phi$ est nulle en dehors de $]-T/4, T/4[^q$, on peut écrire

$$\theta_n(x) = \int_{]-T/4, T/4[^q} R_n(x-s) \phi(s)\, ds, \tag{D.1.2}$$

et $\theta_n$ est donc, sur $]-T/4, T/4[^q$, une combinaison linéaire de fonctions de la forme

$$e^{2i\pi(k_1 x_1 + \ldots + k_q x_q)/T} \int_{]-T/4, T/4[^q} e^{-2i\pi(k_1 s_1 + \ldots + k_q s_q)/T} \phi(s)\, ds,$$

c'est à dire une combinaison linéaires de $\alpha_{k_1, \ldots, k_q} \prod_{r=1}^q \exp(2i\pi k_r x_r/T)$ pour certains coefficients complexes $\alpha_{k_1, \ldots, k_q}$; en mettant ces coefficients dans l'une quelconque des fonctions, on voit que $\theta_n$ est, sur $]-T/4, T/4[^q$, une somme finie de $\prod_r \eta_r(x_r)$, où $\eta_r$ sont des fonction $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à valeurs complexes. Or $\theta_n$ est à valeurs réelles (cf.(D.1.2)), et est donc égale à sa partie réelle, soit une somme finie de $\mathrm{Re}\left(\prod_r \eta_r(x_r)\right)$; on peut alors conclure en constatant, par récurrence sur $q$, que toute fonction de la forme $\mathrm{Re}\left(\prod_{r=1}^q \eta_r(x_r)\right)$ est une somme finie de $\prod_{r=1}^q \varphi_r(x_r)$ avec $\varphi_r \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à valeurs réelles (la récurrence est immédiate en utilisant à la formule $\mathrm{Re}(ab) = \mathrm{Re}(a)\mathrm{Re}(b) - \mathrm{Im}(a)\mathrm{Im}(b)$ et le fait que pour tout $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à valeurs complexes, $\mathrm{Re}(\eta)$ et $\mathrm{Im}(\eta)$ sont dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$)). ■

## D.2 Séparabilité pour la norme $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$

**Théorème D.2.1** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Il existe $D \subset \mathcal{D}(\Omega)$ dénombrable tel que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, il existe un compact $K$ de $\Omega$ et une suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geq 1} \in D$ à supports dans $K$ vérifiant*

$$\begin{array}{rcl} \varphi_n & \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} & \varphi \text{ uniformément sur } \Omega, \\ \partial_i \varphi_n & \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} & \partial_i \varphi \text{ uniformément sur } \Omega, \text{ pour tout } i \in [1, N]. \end{array}$$

Démonstration:
♢ Etape 1: $\mathcal{C}_c^0(\Omega)$ est séparable (pour la norme $||\cdot||_{L^\infty(\Omega)}$).

Prenons, lorsque $l \geq 1$, le compact $K_l = \{x \in \Omega \mid d(x, \Omega^c) \geq 1/l\}$: comme $K_l \subset \overset{\circ}{K}_{l+1}$, il existe $\gamma_l \in \mathcal{D}(\Omega)$ dont le support est dans $K_{l+1}$ et qui vaut 1 au voisinage de $K_l$.
Notons $D_1 = \{\gamma_l P\,,\ l \geq 1\,,\ P$ polynôme en $N$ variables, à coefficients rationnels$\}$: $D_1 \subset \mathcal{C}_c^0(\Omega)$ est dénombrable. De plus, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)$, il existe $l \geq 1$ tel que $\text{supp}(\varphi) \subset K_l$ (il suffit de prendre $l \geq 1/(d(\text{supp}(\varphi), \Omega^c))$); par le théorème de Stone-Weierstrass, il existe une suite $(P_n)_{n\geq 1}$ de polynômes en $N$ variables, à coefficients rationnels, qui converge uniformément vers $\varphi$ sur $K_{l+1}$: considérons $\varphi_n = \gamma_l P_n \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)$. On a $||\varphi_n - \varphi||_{L^\infty(K_l)} = ||P_n - \varphi||_{L^\infty(K_l)} \to 0$ lorsque $n \to \infty$ et, comme $\text{supp}(\varphi) \subset K_l$ et $\text{supp}(\varphi_n) \subset K_{l+1}$, $||\varphi_n - \varphi||_{L^\infty(\Omega \backslash K_l)} = ||\gamma_l P_n||_{L^\infty(K_{l+1}\backslash K_l)} \leq ||\gamma_l||_{L^\infty(\Omega)} ||P_n||_{L^\infty(K_{l+1}\backslash K_l)} = ||\gamma_l||_{L^\infty(\Omega)} ||P_n - \varphi||_{L^\infty(K_{l+1}\backslash K_l)} \to 0$ lorsque $n \to \infty$, puisque $P_n \to \varphi$ uniformément sur $K_{l+1}$. Finalement, on a $||\varphi_n - \varphi||_{L^\infty(\Omega)} \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
On a donc montré que $D_1$ est dense dans $\mathcal{C}_c^0(\Omega)$, ce qui permet de conclure cette étape.
♢ Etape 2: $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$ est séparable (pour la norme $||\cdot||_{L^\infty(\Omega)} + \sum_{i=1}^N ||\partial_i \cdot||_{L^\infty(\Omega)}$).
Astuce classique: l'application

$$\Theta \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{C}_c^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{C}_c^0(\Omega) \times (\mathcal{C}_c^0(\Omega))^N \\ f & \longrightarrow & (f, \nabla f) \end{array} \right.$$

est une injection isométrique de $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$ dans l'espace séparable (cf Etape 1) $(\mathcal{C}_c^0(\Omega))^{N+1}$ muni de la norme $||(g^{(0)}, \ldots, g^{(N)})|| = \sum_{j=0}^N ||g_j||_{L^\infty(\Omega)}$. Ainsi, $Im(\Theta)$ est séparable: il existe $D_2$ dénombrable dense dans $Im(\Theta)$; par définition de $Im(\Theta)$, et puisque $\Theta$ est injective, $D_2 = \Theta(D_3)$ pour un $D_3$ dénombrable ($\Theta$ est une bijection entre $D_2$ et $D_3$).
Si $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)$, il existe $(g_n)_{n\geq 1} \in D_2$ qui converge dans $(\mathcal{C}_c^0(\Omega))^{N+1}$ vers $\Theta(\varphi)$, c'est à dire $g_n^{(0)} \to \varphi$ uniformément sur $\Omega$ et, pour tout $i \in [1, N]$, $g_n^{(i)} \to \partial_i \varphi$ uniformément sur $\Omega$; par définition de $D_3$, cela signifie qu'il existe $(\varphi_n)_{n\geq 1} \in D_3$ tel que, pour tout $n \geq 1$, $\Theta(\varphi_n) = g_n$, ce qui implique $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$: $D_3$ est dénombrable dense dans $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$.
♢ Etape 3: démonstration du résultat.
$\mathcal{D}(\Omega)$ est une partie de l'espace séparable $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$, donc il existe $D_4$ dénombrable dense dans $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme de $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$.
Soit, avec les notations de l'étape 1, $D = \{\gamma_l \varphi\,,\ l \geq 1\,,\ \varphi \in D_4\}$: $D$ est dénombrable; nous allons montrer que $D$ est la partie de $\mathcal{D}(\Omega)$ cherchée.
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $l \geq 1$ tel que $\text{supp}(\varphi) \subset K_l$; il existe, par définition de $D_4$, une suite $(\varphi_n)_{n\geq 1} \in D_4$ qui converge, dans $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$, vers $\varphi$. Prenons $\phi_n = \gamma_l \varphi_n \in D$:

- $\phi_n \to \varphi$ uniformément sur $\Omega$: en effet, $\phi_n \to \varphi$ uniformément sur $K_l$ (car, sur $K_l$, $\phi_n = \varphi_n$), et

$$||\phi_n - \varphi||_{L^\infty(\Omega\backslash K_l)} = ||\gamma_l \varphi_n||_{L^\infty(\Omega\backslash K_l)} \leq ||\gamma_l||_{L^\infty(\Omega)} ||\varphi_n||_{L^\infty(\Omega\backslash K_l)} \to 0$$

  lorsque $n \to \infty$, puisque $\varphi_n \to \varphi \equiv 0$ sur $\Omega \backslash K_l$.

- $\partial_i \phi_n \to \partial_i \varphi$ uniformément sur $\Omega$: en effet, $\partial_i \phi_n = \gamma_l \partial_i \varphi_n + \varphi_n \partial_i \gamma_l$ et, comme précédemment, on voit que $\gamma_l \partial_i \varphi_n \to \partial_i \varphi$ uniformément sur $\Omega$; de plus, $\gamma_l \equiv 1$ au voisinage de $K_l$, donc $\varphi_n \partial_i \gamma_l = 0$ sur $K_l$ et

$$||\varphi_n \partial_i \gamma_l||_{L^\infty(\Omega)} = ||\varphi_n \partial_i \gamma_l||_{L^\infty(\Omega\backslash K_l)} \leq ||\partial_i \gamma_l||_{L^\infty(\Omega)} ||\varphi_n||_{L^\infty(\Omega\backslash K_l)} \to 0$$

  lorsque $n \to \infty$, puisque $\varphi_n \to \varphi \equiv 0$ hors de $K_l$.

On a donc bien la convergence voulue de $(\phi_n)_{n\geq 1} \in D$ vers $\varphi$, et on conclut en remarquant que tous les éléments de cette suite ont leur support dans le compact $K_{l+1}$ qui ne dépend que de $\varphi$. ■